



Algebra di Boole

1 Funzioni booleane

É consigliato rivedere la parte sulla logica nelle slide '4. Logica'.

Si ricorda che le variabili booleane possono assumere solo i valori 0 e 1.

Una funzione booleana di N variabili specifica il valore della variabile dipendente per ogni combinazione dei valori delle N variabili indipendenti.

Una tabella di verità composta da N variabili ha un numero di righe pari a 2^N : il numero 2 é legato al fatto che ciascuna variabile puó assumere due valori, mentre N al fatto che le N variabili corrispondono a N bit. Nel caso di $N = 3$ si hanno $2^3 = 8$ righe.

Il numero di funzioni booleane diverse per N variabili é pari a 2^{2^N} . Nel caso di $N = 3$ si hanno $2^3 = 8$ righe e $2^8 = 256$ funzioni booleane differenti.

Problema 1 - Costruire la funzione booleana associata ad una tabella di verità.

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Soluzione:

La funzione $F = f(A, B, C, D)$ sará funzione delle variabili A, B, C, D e degli operatori booleani che legano le variabili.

- La funzione F avrá tanti termini quante sono le righe pari a 1.
- Questi termini sono dati dal prodotto logico delle quattro variabili con variabile negate se nella riga tale variabile vale 0.
- I termini ottenuti sono poi sommati.

La funzione booleana risultante é quindi:

$$F = A\bar{B}\bar{C}D + ABC\bar{D} + ABCD$$

Problema 2 - Costruire la tabella di verità associata alla funzione booleana.

$$F = ABC\bar{C} + A\bar{B}C + \overline{ABC} + \overline{ABC}$$

Soluzione:

La funzione F dipende da tre variabili A , B e C .

- La tabella di verità avrà tante righe pari a 1 quanti sono i termini della funzione booleana.
- Ogni termine corrisponde univocamente ad una riga della tabella le cui variabili sono pari ad 1 se la variabile è non negata o 0 se la variabile è negata.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Problema 3 - Semplificare una funzione booleana.

$$F = AB\bar{C}D + ABC\bar{D} + ABCD$$

Soluzione:

Tra il primo e il terzo termine è possibile mettere in evidenza ABD per la proprietà distributiva. Per la proprietà di complemento $\bar{C} + C = 1$. Tra il secondo e il terzo termine è possibile mettere in evidenza ABC per la proprietà distributiva. Il terzo termine si usa due volte, cosa ammissibile per la proprietà di assorbimento. Per la proprietà di complemento $\bar{D} + D = 1$.

$$\begin{aligned} F &= AB\bar{C}D + ABC\bar{D} + ABCD + ABCD = \\ &= ABD(\bar{C} + C) + ABC(\bar{D} + D) = \\ &= ABD + ABC \end{aligned}$$

Problema 4 - Costruire la funzione booleana associata ad una tabella di verità.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Soluzione:

La funzione $F = f(A, B, C)$ sarà funzione delle variabili A, B, C e degli operatori booleani che legano le variabili.

- La funzione F avrà tanti termini quante sono le righe pari a 1.
- Questi termini sono dati dal prodotto logico delle quattro variabili con variabile negate se nella riga tale variabile vale 0.
- I termini ottenuti sono poi sommati.

La funzione booleana risultante é quindi:

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC$$

Problema 5 - Costruire la funzione booleana associata ad una tabella di verità.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Soluzione:

La funzione $F = f(A, B, C)$ sarà funzione delle variabili A, B, C e degli operatori booleani che legano le variabili.

- La funzione F avrà tanti termini quante sono le righe pari a 1.
- Questi termini sono dati dal prodotto logico delle quattro variabili con variabile negate se nella riga tale variabile vale 0.
- I termini ottenuti sono poi sommati.

La funzione booleana risultante é quindi:

$$F = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$$

Problema 6 - Semplificare una funzione booleana.

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} F &= \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}BC = \\ &= \overline{A}B(\overline{C} + C) + \overline{A}C(\overline{B} + B) = \\ &= \overline{A}(B + C) \end{aligned}$$

Problema 7 - Applicando le proprietà dell'algebra di Boole verificare la seguente equivalenza tra espressioni.

$$\overline{A}B\overline{C} + \overline{B}C + A(B + \overline{B}C) = A + \overline{C}$$

Da fare come esercizio.

Problema 8 - Applicando le proprietà dell'algebra di Boole semplificare le seguenti espressioni e disegnarne la tavola di verità.

$$AB\bar{C} + AB + AC + C$$

$$\overline{ABC} + \overline{AB} + \overline{AB} + AB$$

$$A + AB + B + BC$$

$$\overline{(\overline{AB} + C) + (\overline{C} + DE)}$$

Da fare come esercizio.