

4. Logica

Insegnamento di Informatica

Elisabetta Ronchieri

Corso di Laurea di Economia, Università di Ferrara

I semestre, anno 2014-2015



Argomenti

Logica

Algebra di Boole

Operazioni logiche

A che cosa servono

Proprietá

Porte Logiche



Argomenti

Logica

Algebra di Boole

Operazioni logiche

A che cosa servono

Proprietá

Porte Logiche



Logica

- ▶ Si occupa dello studio delle strutture e delle regole del discorso, per comprenderle e usarle a proprio vantaggio, al fine di ottenere conclusioni convincenti partendo da premesse definite.
- ▶ É ciò che avviene per esempio in giurisprudenza, matematica e filosofia:
 - ▶ l'avvocato che convince la corte usando alcune premesse che collega logicamente nel modo più convincente possibile;
 - ▶ il matematico che usa ipotesi e ragionamenti logici per giungere alla tesi da dimostrare;
 - ▶ il filosofo quando cerca di proporre l'esattezza dei propri ragionamenti.
- ▶ Esiste un modo logico di ragionare tramite il quale é possibile convincere gli altri di conclusioni non immediatamente verificabili.
- ▶ Nell'antichità chi risultava più logico era anche colui che vinceva le dispute verbali.



Logica

Aristotele (384-322 a.C.) gettò le basi dell'attuale logica.

- ▶ Il principio di non contraddizione, ossia una cosa e il suo contrario non possono essere contemporaneamente vere.

Le due proposizioni "Il professore di Informatica é malato", e "Il professore di Informatica non é malato" non possono essere entrambe vere.

- ▶ Il principio del terzo escluso, ossia o é vero una cosa o é vero il suo contrario, non può esserci una terza possibilità.

"Lo studente é preparato" o "Lo studente non é preparato", una delle due é vera e non esiste una terza possibilità

- ▶ Il concetto di sillogismo di Aristotele:

Se A implica B, Se B implica C, allora A implica C.

Esempi:

- ▶ Tutti gli Ateniesi hanno la barba, Socrate é Ateniese, quindi Socrate ha la barba;
- ▶ Tutti gli uomini sono mortali, Socrate é un uomo, quindi Socrate é mortale.



Crisippo (280-205 a.C.) contribuí alla logica come Aristotele.

- ▶ É possibile raggiungere nuove conoscenze attraverso la logica.
- ▶ Regole di deduzione logica:
 - ▶ modus ponens (modo che afferma)
Se ogni volta che si verifica A si verifica B, e si é verificato A, allora si é verificato anche B.
 - ▶ modus tollens (modo che toglie la verità di una proposizione, togliendo quella di un'altra)
Se ogni volta che si verifica A si verifica B, e non si é verificato B, allora non si é verificato A.



Argomenti

Logica

Algebra di Boole

Operazioni logiche

A che cosa servono

Proprietá

Porte Logiche



Algebra di Boole

- ▶ Per definire un'algebra serve specificare i termini, le operazioni, le regole di precedenza tra le operazioni, le proprietà delle operazioni e come si valutano le espressioni.
- ▶ L'algebra oggi é definita tramite l'intuizione del matematico Inglese George Boole (1815-1864).
- ▶ G. Boole sosteneva che il pensiero logico potesse essere decomposto in insiemi di scelte caratterizzate da due possibilità.
- ▶ Nel 1940 questa idea venne ripresa e usata per costruire i calcolatori elettronici.
- ▶ G. Boole introdusse un simbolismo, algebra di Boole, che rappresenta un sistema formale logico-deduttivo.



Sistema Formale

Si caratterizza dai seguenti concetti:

- ▶ Proposizione, ossia una frase di senso compiuto:
 - ▶ "Oggi piove", e "Oggi non mi va di mangiare" sono di senso compiuto;
 - ▶ "Cane non beve matite" non é di senso compiuto.
- ▶ Enunciato, ossia una proposizione della quale si può stabilire con certezza se é vera o falsa:
 - ▶ "Il Colosseo é a Roma" é una proposizione vera, quindi é un enunciato;
 - ▶ "Il Vesuvio si trova in Toscana" é una proposizione falsa, quindi é un enunciato;
 - ▶ "Che bel tempo c'è" non é un enunciato, non essendo una proposizione sempre vera o falsa.
- ▶ Termini dell'algebra di Boole, ossia le variabili booleane o variabili logiche o asserzioni rappresentati dagli enunciati, i quali possono essere rappresentati con 0 (enunciato falso) o 1 (enunciato vero).



Sistema Formale

- ▶ Operazioni fondamentali implementate tramite connettivi o operatori logici AND, OR, NOT e altri derivati:
 - ▶ esistono operazioni unarie, ossia che si applicano ad un solo operando;
 - ▶ esistono operazioni binarie che si applicano a due operandi.
- ▶ Precedenza degli operatori: $A \text{ or } (B \text{ and } C)$
 - ▶ le operazioni unarie hanno la precedenza su quelle binarie;
 - ▶ l'operazione binaria AND ha la precedenza su quella OR;
 - ▶ le parentesi hanno la precedenza.
- ▶ Espressioni, ossia rappresentazioni di una funzione booleana con risultato pari a 0 (falso) o 1 (vero). Si valutano tramite tabelle di verità o tabelle logiche che determinano se una proposizione é vera o falsa.



Operazioni logiche fondamentali

- ▶ Operatori logici binari (con 2 operandi logici)
 - Operatore OR, o somma logica (+) o disgiunzione;
 - Operatore AND, o prodotto logico ($\cdot$) o congiunzione.
- ▶ Operatore logico unario (con 1 operando)
 - Operatore NOT, o negazione o complemento ($-$).



Prodotto Logico AND

- ▶ Supponiamo che le variabili indipendenti P e S indichino le proposizioni "Sta piovendo" e "Ho tanti soldi".
- ▶ Sia la variabile dipendente T a rappresentare la proposizione "Prendo il taxi".
- ▶ Possono accadere i seguenti casi:
 - ▶ non piove, non ho tanti soldi, allora non prendo il taxi;
 - ▶ non piove, ho tanti soldi, allora non prendo il taxi;
 - ▶ piove, non ho tanti soldi, allora non prendo il taxi;
 - ▶ piove, ho tanti soldi, allora prendo il taxi.
 - ▶ quindi prendo il taxi solo se piove e ho tanti soldi.
- ▶ Il prodotto logico o AND interpreta il significato di congiunzione in genere indicato con "e".
- ▶ AND é una operazione binaria, per cui necessita di due variabili.
- ▶ Il prodotto AND, applicato su due o piú variabili, é tale da risultare 1 solo se tutte e due le variabili sono allo stato 1.



Somma Logica OR

- ▶ Supponiamo che le variabili indipendenti P e S indichino le proposizioni "Sta piovendo" e "Fa freddo".
- ▶ Sia la variabile dipendente T a rappresentare la proposizione "Metto l'impermeabile".
- ▶ La variabile T é legata alle due variabili P e S come segue:
 - ▶ non piove, non fa freddo, allora non metto l'impermeabile;
 - ▶ non piove, fa freddo, allora metto l'impermeabile;
 - ▶ piove, non fa freddo, allora metto l'impermeabile;
 - ▶ piove, fa freddo, allora metto l'impermeabile;
 - ▶ quindi metto l'impermeabile quando fa freddo, quando piove o quando piove e fa freddo.
- ▶ La somma logica o OR interpreta il significato di disgiunzione in genere indicato con "oppure/o".
- ▶ OR é una operazione binaria, per cui necessita di due variabili.
- ▶ La somma OR, applicata su due o piú variabili, é tale da risultare 1 se almeno una variabile é allo stato 1.



Negazione NOT

- ▶ Supponiamo che la variabile indipendente sia 0, allora la variabile dipendente é 1, e viceversa.
- ▶ Se la proposizione associata a F é "fa caldo" e la proposizione associata a C é "fa freddo", allora si può avere:
 - ▶ non fa caldo, allora fa freddo;
 - ▶ fa caldo allora non fa freddo.
- ▶ NOT é una operazione unaria, per cui necessita di una sola variabile.
- ▶ La negazione NOT, applicata ad una variabile, é tale da risultare 1 se la variabile vale 0, e viceversa.



Variabili e funzioni logiche

Le variabili logiche, indicate con le lettere (come A, B, C, X, Y, W, Z) possono assumere solo i valori distinti 1 e 0, ossia vero e falso.

Le funzioni, come le variabili logiche, possono avere solo valori 0 e 1.

Le funzioni booleane possono essere espresse come combinazione di AND, OR e NOT.



Operatori logici e loro tabelle di verità

Poiché le variabili logiche ammettono due soli valori, si può definire compiutamente ogni operatore logico tramite una tabella di associazione variabili-risultato.

A	B	A or B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	A and B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	not A
0	1
1	0

Le tabelle elencano tutte le possibili combinazioni in ingresso e il risultato associato a ciascuna combinazione.



Operatori XOR e XNOR

XOR o OR esclusivo

A	B	A or esclusivo B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

L'uscita assume valore 1 se le variabili di ingresso hanno un valore diverso tra loro.

X and $\overline{Y}$ or $\overline{X}$ and Y

XNOR o NOR esclusivo

A	B	A nor esclusivo B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L'uscita assume valore 1 se le variabili di ingresso hanno lo stesso valore.

X and Y or $\overline{X}$ and $\overline{Y}$



Espressioni logiche (o Booleane)

- ▶ Come le espressioni algebriche, tramite questa algebra si possono comporre espressioni logiche che possono essere vere o false, costruite con:

Variabili logiche (letterali): come $A, B, C = 0$ oppure 1

Operatori logici: AND, OR, NOT

- ▶ Esempi:

$A \text{ or } (B \text{ and } C)$

$(A \text{ and } (\text{not } B)) \text{ or } (B \text{ and } C)$

- ▶ Precedenza: l'operatore not precede l'operatore and, che a sua volta precede l'operatore or

$A \text{ and not } B \text{ or } B \text{ and } C = (A \text{ and } (\text{not } B)) \text{ or } (B \text{ and } C)$

- ▶ Per ricordarlo, si pensi OR come $+$ (piú), AND come $" \cdot "$ (per) e NOT come $" - "$ (cambia segno)



Tabelle di verità delle espressioni logiche

Specificano i valori di verità per tutti i possibili valori delle variabili.

$$F = \text{NOT} ((A \text{ OR } B) \text{ AND } (\text{NOT } A))$$

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1



Tabelle di verità delle espressioni logiche

$$F = A \text{ and } B \text{ or not } C = (A \text{ and } B) \text{ or } (\text{ not } C)$$

A	B	C	X = A and B	Y = not C	X	or	Y	F
0	0	0	0 = 0 and 0	1 = not 0	0	or	1	1
0	0	1	0 = 0 and 0	0 = not 1	0	or	0	0
0	1	0	0 = 0 and 1	1 = not 0	0	or	1	1
0	1	1	0 = 0 and 1	0 = not 1	0	or	0	0
1	0	0	0 = 1 and 0	1 = not 0	0	or	1	1
1	0	1	0 = 1 and 0	0 = not 1	0	or	0	0
1	1	0	1 = 1 and 1	1 = not 0	1	or	1	1
1	1	1	1 = 1 and 1	0 = not 1	1	or	0	1



Tabelle di verità delle espressioni logiche

$$F = A \text{ or } (B \text{ and } C)$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Tabelle di verità delle espressioni logiche

$$F = A \text{ and } (B \text{ or } (\text{not } C))$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



Esercizi

$$F = \text{not} ((A \text{ or } B) \text{ and } (\text{not } A))$$

1. considerare le due variabili logiche A e B;
2. calcolare il not A, e l'operatore or;
3. risolvere l'operatore and;
4. infine calcolare il not.



Esercizi

$$F = (B \text{ or not } C) \text{ and } (A \text{ or not } C)$$

1. considerare le tre variabili logiche A, B e C;
2. calcolare il not C e l'operatore or;
3. risolvere l'operatore and.



A che cosa servono le espressioni logiche?

- ▶ A modellare alcune (non tutte) forme di ragionamento.
 - $A = \text{é vero che } 1 \text{ é maggiore di } 2 ? (\text{si o no, qui é no}) = 0$
 - $B = \text{é vero che } 2 \text{ piú } 2 \text{ fa } 4 ? (\text{si o no, qui é si}) = 1$
 - $A \text{ and } B = \text{é vero che } 1 \text{ sia maggiore di } 2 \text{ e che } 2 \text{ piú } 2 \text{ faccia } 4 ? \text{ Si ha che } A \text{ and } B = 0 \text{ and } 1 = 0, \text{ dunque no}$
 - $A \text{ or } B = \text{é vero che } 1 \text{ sia maggiore di } 2 \text{ o che } 2 \text{ piú } 2 \text{ faccia } 4 ? \text{ Si ha che } A \text{ or } B = 0 \text{ and } 1 = 1, \text{ dunque si.}$
- ▶ OR, AND e NOT vengono anche chiamati connettivi logici, perché funzionano come le congiunzioni coordinanti "o" ed "e", e come la negazione "non", del linguaggio naturale.
- ▶ Si modellano ragionamenti (o deduzioni) basati solo sull'uso di "o", "e" e "non".



Che cosa non si può modellare con le espressioni logiche?

- ▶ Le espressioni logiche (booleane) non modellano:

Domande esistenziali : "c'è almeno un numero reale x tale che il suo quadrato valga 1 ?" (si sa bene che non c'è):

$$\exists x | x^2 = 1 \text{ é falso}$$

Domande universali : "ogni numero naturale è la somma di quattro quadrati di numeri naturali ?" (è stato dimostrato):

$\forall x | x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é vero ("teorema dei 4 quadrati"). Più esattamente andrebbe scritto:

$$\forall x \exists a, b, c, d | x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

- ▶ $\exists$ e $\forall$ sono chiamati "operatori di quantificazione", e sono ben diversi da OR, AND e NOT.
- ▶ La parte della logica che tratta solo degli operatori OR, AND e NOT si chiama calcolo proposizionale.
- ▶ Aggiungendo gli operatori di quantificazione, si ha il calcolo dei predicati (che è molto più complesso).



Teorema dei 4 quadrati

- ▶ Il teorema dei quattro quadrati, detta anche congettura di Bachet nel 1621, afferma che ogni intero positivo può essere espresso come somma di (al più) quattro quadrati perfetti.
- ▶ Per ogni intero positivo y esistono interi non-negativi a, b, c, d tali che
$$y = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$



Tautologia

É una espressione logica che é sempre vera, per qualunque combinazione di valori delle variabili.

Esempio:

- ▶ Principio del "terzo escluso": $A \text{ or } \text{not } A$
- ▶ Non si dá un terzo caso tra l'evento A e la sua negazione.



Contraddizione

É una espressione logica che é sempre falsa, per qualunque combinazione di valori delle variabili.

Esempio:

- ▶ Principio di "non contraddizione": A and not A
- ▶ L'evento A e la sua negazione non possono essere entrambi veri.



Equivalenza tra espressioni

- ▶ Due espressioni logiche si dicono equivalenti (e si indica con $\Leftrightarrow$) se hanno la medesima tabella di verità.
- ▶ La verifica é algoritmica.

Esempio:

A	B	not A and not B	$\Leftrightarrow$	not (A or B)
0	0	1 and 1 = 1		not 0 = 1
0	1	1 and 0 = 0		not 1 = 0
1	0	0 and 1 = 0		not 1 = 0
1	1	0 and 0 = 0		not 1 = 0

- ▶ Espressioni logiche equivalenti modellano gli stessi stati di verità a fronte delle medesime variabili.



Proprietá dell'algebra di Boole

- ▶ L'algebra di Boole gode di svariate proprietà, formulabili come equivalenze tra espressioni logiche, valide per qualunque combinazione di valori delle variabili.
- ▶ Leggi di De Morgan:
 - 1^a legge $\text{not } (A \text{ and } B) = \text{not } A \text{ or } \text{not } B$
 - 2^a legge $\text{not } (A \text{ or } B) = \text{not } A \text{ and } \text{not } B$



Proprietá dell'algebra di Boole

- Alcune proprietà somigliano a quelle dell'algebra numerica tradizionale:

Proprietá associativa : della somma e del prodotto logico

$$A \text{ or } (B \text{ or } C) = (A \text{ or } B) \text{ or } C$$

$$A \text{ and } (B \text{ and } C) = (A \text{ and } B) \text{ and } C$$

Proprietá commutativa : della somma e del prodotto logico

$$A \text{ or } B = B \text{ or } A$$

$$A \text{ and } B = B \text{ and } A$$

Proprietá distributiva di AND rispetto a OR:

$$A \text{ and } (B \text{ or } C) = (A \text{ and } B) \text{ or } (A \text{ and } C)$$

Proprietá distributiva di OR rispetto a AND:

$$A \text{ or } (B \text{ and } C) = (A \text{ or } B) \text{ and } (A \text{ or } C)$$



Proprietá dell'algebra di Boole

- Ma parecchie altre sono insolite:

Proprietá di assorbimento : A assorbe B,

$$A \text{ or } A \text{ and } B = A$$

$$A \text{ or } A = A$$

$$A \text{ and } A = A$$

Proprietá di annullamento : $A \text{ and } 0 = 0$, $A \text{ or } 1 = 1$

Proprietá dell'elemento neutro : $A \text{ and } 1 = A$, $A \text{ or } 0 = A$

Proprietá Complemento : $A \text{ and not } A = 0$, $A \text{ or not } A = 1$

Proprietá Doppia negazione : $\text{not} (\text{not } A) = A$

Proprietá della negazione : se $A = B$, allora $\text{not } A = \text{not } B$

Proprietá dell'idempotenza : $A \text{ and } A = A$, $A \text{ or } A = A$



Proprietá dell'algebra di Boole

Principio di dualità : Data una funzione F , si chiama espressione duale di F quella che si ottiene con le seguenti sostituzioni:

- ▶ AND si sostituisce con OR e viceversa;
- ▶ 0 si sostituisce con 1 e viceversa;
- ▶ ogni variabile si sostituisce con il suo complemento e viceversa.

Esempio:

Data l'espressione $F = A + (\overline{B} \cdot C)$, la espressione duale é $\overline{F} = \overline{A} \cdot (B + \overline{C})$.



Uso delle proprietà

- ▶ Trasformare un'espressione logica in un'altra, differente per aspetto ma equivalente:
not A and B or A = (assorbimento)
= not A and B or (A or A and B) = (togli le parentesi)
= not A and B or A or A and B = (commutativa)
= not A and B or A and B or A = (distributiva)
= (not A or A) and B or A = (legge dell'elemento 1)
= true and B or A = (vero and B = B)
= B or A
é piú semplice dell'espressione originale.
- ▶ Si verifichi l'equivalenza con le tabelle di verità.
- ▶ Occorre conoscere un'ampia lista di proprietà e si deve riuscire a "vederle" nell'espressione originale.



Funzioni booleane

- ▶ Una funzione booleana di N variabili specifica il valore della variabile dipendente.
- ▶ Data una tabella di N variabili con 2^N righe, si hanno 2^{2^N} funzioni booleane differenti.
- ▶ Per costruire la funzione booleana associata ad una tabella di verità, é necessario costruire l'espressione logica contenente le variabili della tabella e gli operatori logici che legano le variabili.
 - ▶ Vi saranno tanti termini quanti sono le righe di valore 1;
 - ▶ Ogni termine é dato dal prodotto logico delle N variabili: in presenza di variabili 0 si mette una variabile negata;
 - ▶ Si sommano i termini ottenuti.



Costruire funzioni booleana

- Data la tabella

A	B	F
0	0	0
0	1	1 ←
1	0	1 ←
1	1	0

- Individuare le righe con F pari a 1
- Verificare se ci sono dei valori delle variabili A e B pari a 0 per effettuarne la negazione
- Determinare F:
$$F = A\overline{B} + \overline{A}B$$



Funzioni booleane

- ▶ Per costruire la tabella di verità associata alla funzione booleana, bisogna individuare il numero di variabili per determinare il numero di righe nella tabella.
 - ▶ Avremo tante righe di valore 1 quanti sono i termini della funzione booleana;
 - ▶ Ogni termine corrisponde univocamente ad una riga della tabella secondo la trasformazione: 1 se la variabile é non negata, 0 se la variabile é negata.



Costruire la tabella di verità

- ▶ Data la funzione booleana F:
$$F = A\overline{B} + \overline{A}B$$
- ▶ Riportare sulla tabella il numero di variabili, ossia A e B.
- ▶ Mettere 1 in corrispondenza dei termini della F.
- ▶ Mettere 0 in corrispondenza delle altre combinazioni dei valori delle variabili.
- ▶ Impostare la tabella:

A	B	F
0	0	0
0	1	1 ←
1	0	1 ←
1	1	0



Argomenti

Logica

Algebra di Boole

Operazioni logiche

A che cosa servono

Proprietá

Porte Logiche



Porte Logiche

- ▶ Sono elementi circuitali che corrispondono alle operazioni logiche e che possono essere combinati per effettuare operazioni piú complesse.
- ▶ Sono circuiti logici che operano su almeno un segnale di ingresso e producono un segnale di uscita, manipolando informazione binaria.
- ▶ I segnali assumono due distinti livelli logici ai quali si fanno corrispondere i valori logici 0 e 1.



Porte Logiche

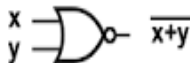
- Le porte logiche che rappresentano le operazioni AND, OR, NOT, NAND, NOR e XOR.



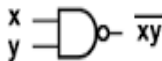
OR



AND



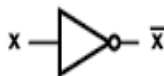
NOR



NAND



XOR



NOT

Uso delle proprietà booleane

- ▶ É possibile semplificare le funzioni booleane:

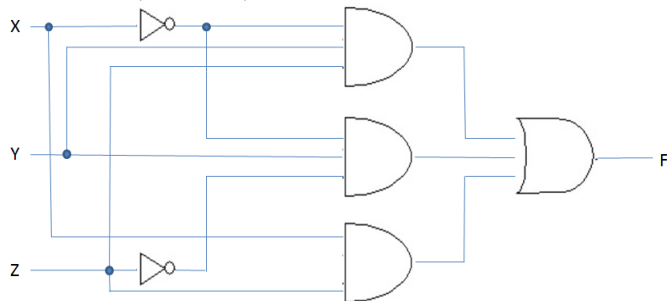
$$\begin{aligned} F &= \overline{X}YZ + \overline{X}Y\overline{Z} + XZ = \\ &= \overline{X}Y(Z + \overline{Z}) + XZ = (\text{assioma identità}) \\ &= \overline{X}Y(1) + XZ = \\ &= \overline{X}Y + XZ \end{aligned}$$

- ▶ Realizzare il circuito logico in modo più semplice: quindi minor costi di realizzazione dei circuiti e minore occupazione di spazio.



Uso delle proprietà booleane

$$F = \overline{X}YZ + \overline{X}Y\overline{Z} + XZ$$



Uso delle proprietà booleane

$$F = \overline{X}YZ + \overline{X}Y\overline{Z} + XZ = \overline{X}Y + XZ$$

