1.2 Concetti base dell'Informatica: Informazione

Insegnamento di Informatica

Elisabetta Ronchieri

Corso di Laurea di Economia, Universitá di Ferrara

I semestre, anno 2014-2015

Argomenti

Argomenti

L'elaboratore

- Manipola l'informazione tramite la sequenza di azioni (istruzioni) specificate dall'algoritmo.
- Rappresenta tutte le informazioni in modo numerico sia questa un numero o altra cosa.
- Utilizza la rappresentazione piú adatta per garantire un'esecuzione automatica delle istruzioni.

$\Rightarrow$ Impone delle regole di conversione tra la rappresentazione "umana" e quella propria dell'elaboratore.

La rappresentazione

- É il sistema che indica il contenuto dell'informazione.
- Usa una sequenza di simboli provenienti da un insieme finito detto alfabeto.

  Esempio di alfabeto per la rappresentazione numerica[1]:
  - cifre numeriche da 0 a 9;
  - separatore decimale ,;
  - separatore delle migliaia .;
  - segno positivo $+$ e negativo $-$.

  Esempio di alfabeto per la rappresentazione alfanumerica:
  - caratteri dell'alfabeto (26 in tutto);
  - cifre numeriche da 0 a 9;
  - altri simboli (come $'$, ?,!, $+$, $-$).

[1] Adottato da International Organization for Standardization (ISO) per la definizione di norme tecniche.

Regole di composizione

- Sono associate ad ogni alfabeto per definire sequenze ben formate.
- Necessarie perché non tutte le sequenze di simboli identificano in modo corretto un dato:
  - $1.234, 5$ Seq. CORRETTA;
  - $1, 23, 45$ Seq. ERRATA.

  Esempio di regola:
  - é ammesso un solo separatore decimale (ossia ,) per i dati numerici;
  - é ammesso un solo segno di punteggiatura (ossia .) in una frase in lingua italiana.

NOTA: uno stesso alfabeto puó dare luogo a interpretazioni diverse, come nel caso dei decimali e delle migliaia indicati rispettivamente dal . e dalla , nei paesi anglosassoni.[2]

[2] Convenzione adottata anche dai linguaggi di programmazione.

Argomenti

Notazioni

- Esprimono il sistema adottato dalla rappresentazione.
- Sono di due tipi:
  1. Non posizionali caratterizzate da regole proprie che rendono complessa l'elaborazione.
  2. Posizionali che consentono una rappresentazione dei numeri compatta e una facile elaborazione.

Esempi di notazione

Non posizionale: numerazione romana.

- Ogni simbolo (quale *I*, *II* e *X*) corrisponde ad un valore.
- Il valore si ottiene sommando e/o sottraendo i valori dei simboli:
  - $VII = 5 + 1 + 1 = 7$;
  - $LIX = 50 + (10 - 1) = 59$.

Posizionale: numerazione decimale di origine araba.

- Ogni cifra (quale 1, 2 e 100) occupa una posizione, alla quale é associato un peso.
- La posizione prevede lo 0.
- Il valore si ottiene sommando i prodotti di ogni cifra per il peso associato:
  - $735 = 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1$.

Notazione posizionale

- Sfrutta il concetto di base b della rappresentazione.
- Rappresenta un numero come sequenza di simboli detti cifre c.
  Dette:
  - $S = \{0, 1, \ldots, b-1\}$ insieme finito di simboli (alfabeto).
  - la base b pari alla cardinalitá dell'alfabeto $(b = |S|)$.
  - n il numero di cifre intere e m numero di cifre frazionarie.
  - c la cifra appartenente all'alfabeto S, ossia $c \in S$.
  - c_k la cifra c di posizione k-esima nella sequenza.
  - b^k il peso della cifra c di posizione k.

Notazione posizionale

- Ricava il valore v del numero avente n cifre intere e m frazionarie

  $c_{n-1}c_{n-2}\dots c_1c_0.c_{-1}\dots c_{-m}$
- dalla formula posizionale:

  $v = \sum_{k=-m}^{k=n-1} c_k \cdot b^k$
- sommando ciascuna cifra c di posizione k-esima moltiplicata per il proprio peso b^k.
- Le posizioni si contano da destra a sinistra partendo da 0.
- Nel caso di numero intero, le posizioni partono da 0 ($m = 0$).

Rappresentazione posizionale del numero 12

$v = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k \cdot b^k \ , \ n = 2$

Numero	b	Alfabeto	Formula	v
12	4	$0, 1, 2, 3$	$1 \times 4 + 2 \times 1$	sei
12	5	$0, 1, 2, 3, 4$	$1 \times 5 + 2 \times 1$	sette
12	8	$0, 1, \ldots, 7$	$1 \times 8 + 2 \times 1$	dieci
12	10	$0, 1, \ldots, 9$	$1 \times 10 + 2 \times 1$	dodici
12	16	$0, \ldots, 9, A, \ldots, F$	$1 \times 16 + 2 \times 1$	diciotto

Osservazioni

- Una sequenza di cifre non é interpretabile se non si precisa la base in cui é espressa.
- Ogni numero é esprimibile in modo univoco in una qualunque base.
- Ogni numero é espresso da una sequenza precisa di cifre.
- Ogni simbolo rappresenta un valore tra 0 e $b - 1$.

Osservazioni

- Con n cifre di interi nella base b é possibile rappresentare b^n diverse configurazioni.

  Esempi:

  - Se $b = 10$ e $n = 3$, $b^3 = 1000$ e gli interi vanno da 0 a 999.
  - Se vogliamo 25 configurazioni diverse in base 10, servono almeno 2 cifre.

Codifica in base 10, 2, 5 e 16

10	2	5	16	10	2	5	16	10	2	5	16
0	0	0	0	17	10001	32	11	34	100010	114	22
1	1	1	1	18	10010	33	12	35	100011	120	23
2	10	2	2	19	10011	34	13	36	100100	121	24
3	11	3	3	20	10100	40	14	37	100101	122	25
4	100	4	4	21	10101	41	15	38	100110	123	26
5	101	10	5	22	10110	42	16	39	100111	124	27
6	110	11	6	23	10111	43	17	40	101000	130	28
7	111	12	7	24	11000	44	18	41	101001	131	29
8	1000	13	8	25	11001	100	19	42	101010	132	2A
9	1001	14	9	26	11010	101	1A	43	101011	133	2B
10	1010	20	A	27	11011	102	1B	44	101100	134	2C
11	1011	21	B	28	11100	103	1C	45	101101	140	2D
12	1100	22	C	29	11101	104	1D	46	101110	141	2E
13	1101	23	D	30	11110	110	1E	47	101111	142	2F
14	1110	24	E	31	11111	111	1F	48	110000	143	30
15	1111	30	F	32	100000	112	20	49	110001	144	31
16	10000	31	10	33	100001	113	21	50	110010	200	32

Osservazioni

- Il massimo numero rappresentabile M in base b con n cifre intere é $b^n - 1$.

$$
\begin{aligned}
M = \sum_{k=0}^{k=n-1} (b-1) \cdot b^k = \\
= (b-1)(b^0 + b^1 + \ldots + b^{n-1}) = \\
= (b-1)(1 + b^1 + \ldots + b^{n-1}) = \\
= (b + b^2 + \ldots + b^n) - (1 + b^1 + \ldots + b^{n-1}) = \\
= b^n - 1
\end{aligned}
$$

Numero	b	n	M
$(1111)_2$	2	4	15
$(222)_3$	3	3	26
$(156)_{10}$	10	3	999

Osservazioni

- La stessa sequenza di simboli, cambiando base, puó avere significati diversi.

Numero	b	v
$(101)_2$	2	5
$(101)_5$	5	26
$(101)_{10}$	10	101

Operazioni aritmetiche

- Le operazioni, (quali somma, moltiplicazione e altre) sono invarianti rispetto ai cambiamenti di base.
- É usato il meccanismo di riporti e prestiti per l'operazione di somma e sottrazione.
- Gli algoritmi della moltiplicazione e divisione concettualmente sono i soliti. L'elaboratore puó richiedere che siano scomposte in operazioni piú semplici:
    - moltiplicazione realizzata come serie di somme.

Somma e sottrazione

```
  1 1        riporti
  2 3 4 +
  1 4 2 =
  ------
  4 3 1
```

```
    1 1 1    prestiti
  2 0 3 1 -
    4 3 3 =
  --------
  1 0 4 3
```

+ b=5	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

```
    1 1 1     riporti
    1 0 1 1 +
      1 1 1 =
  ----------
  1 0 0 1 0
```

```
    1 1 1    prestiti
  1 0 1 0 -
    1 1 1 =
  --------
      1 1
```

+ b=2	0	1
0	0	1
1	1	10

Moltiplicazione

```
    2 3 4 x
      4 2 =
-----------
  1 0 2 3 +
2 1 0 1 - =
-----------
2 2 0 3 3
```

x b=5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

```
      1 0 1 1 x
        1 0 1 =
---------------
      1 0 1 1 +
    0 0 0 0 - +
  1 0 1 1     =
---------------
1 1 0 1 1 1
```

x b=2	0	1
0	0	0
1	0	1

Divisione

234	4
14	32
1	

x b=5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

1011	10
- 1	101
11	
1	

x b=2	0	1
0	0	0
1	0	1

Esercizi sulle operazioni aritmetiche

- $(234)_5 : (4)_5 =?$
- $(1011)_2 : (10)_2 =?$
- $(A8F6)_{16} + (2C)_{16} =?$
- $(AF6)_{16} \times (2C)_{16} =?$
- $0F + 15 =?$

Errori nelle operazioni aritmetiche

- L'elaboratore puó generare degli errori durante il calcolo delle operazioni aritmentiche.
- É impossibile rappresentare tutti gli infiniti numeri.
- Il massimo numero rappresentabile con n cifre intere e b pari a 2 é $M = 2^n - 1$ (vedere slide 15).
- É possibile avere un risultato completamente errato per overflow o straripamento:

  $5 + 4 = 9$ ($b = 10$, 1 cifra)
  - $(5)_{10} = (101)_2$; $(4)_{10} = (100)_2$;
  - $(9)_{10} = (101)_2 + (100)_2 = (1001)_2$ ($b = 2$, 4 cifre, errore di overflow).
- É possibile verificare la presenza di overflow quando sommando 2 numeri dello stesso segno, si ottiene altro numero di sengo opposto.
- Per evitare overflow bisogna usare un maggiore numero di cifre: non esiste soluzione alternativa.

Conversione da base b a base 10 per numeri interi

- É la naturale applicazione della formula posizionale v (vedere slide 10 con $m = 0$).

Numero	b	Formula	v
$(101)_2$	2	$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$	$(5)_{10}$
$(10100)_2$	2	$1 \times 2^4 + 1 \times 2^2$ $(20)_{10}$	
$(721)_8$	8	$7 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 1 \times 8^0$	$(465)_{10}$
$(12)_8$	8	$1 \times 8^1 + 2 \times 8^0$ $(10)_{10}$	
$(134)_5$	5	$1 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 4 \times 5^0$	$(44)_{10}$
$(7D1)_{16}$	16	$7 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 1 \times 16^0$	$(2001)_{10}$
$(31A)_{16}$	16	$3 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 10 \times 16^0$	$(794)_{10}$

Conversione da base 10 a base b per numeri interi

- É possibile usare la formula posizionale v (vedere slide 10 con $m = 0$).

Numero	b	Formula	v
$(283)_{10}$	10 5	$2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0 =$ $2_5 \times 20_5^2 + 13_5 \times 20_5^1 + 3_5 \times 20_5^0$	$(2113)_5$
$(283)_{10}$	10 2	$2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0 =$ $(10)_2 \times (1010^{10})_2 + (1000)_2 \times (1010^1)_2 + (11)_2 \times (1010^0)_2$	$(100011011)_2$
$(283)_{10}$	10 16	$2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0 =$ $2_{16} \times A_{16}^2 + 8_{16} \times A_{16}^1 + 3_{16} \times A_{16}^0$	$(11B)_{16}$

Conversione da base 10 a base b per numeri interi

- Un metodo usa l'algoritmo delle divisioni successive.
- Per convertire il valore v[3] in un numero di un'altra base b:
  1. Si divide v per b:
     $v = c_0 + c_1 \times b^1 + c_2 \times b^2 + \ldots$
  2. Il resto r della divisione costituisce la cifra meno significativa (Least Significant Bit (LSB)):
     $r = c_0$ dopo la prima iterazione.
  3. Il quoziente q serve a iterare il procedimento:
     $q = c_1 + b \times (c_2 + b \times (c_3 + \ldots))$ dopo la prima iterazione.
  4. Se q é 0, l'algoritmo termina.
  5. Se $q <> 0$, diventa il nuovo valore v^*.
  6. Si itera il procedimento con il valore di v^*.
- Le cifre del numero nella nuova base sono prodotte dalla meno significativa a quella piú significativa (Most Significant Bit (MSB)).

[3] Vedere slide 10 con $m = 0$.

Conversione da base 10 a base b per numeri interi

v	b	Formula	Numero
quindici	4	$q = \frac{15}{4} = 3, r = 2$ $q = \frac{3}{4} = 0, r = 3$	32
undici	2	$q = \frac{11}{2} = 5, r = 1$ $q = \frac{5}{2} = 2, r = 1$ $q = \frac{2}{2} = 1, r = 0$ $q = \frac{1}{2} = 0, r = 1$	1011
sessantatre	10	$q = \frac{63}{10} = 6, r = 3$ $q = \frac{6}{10} = 0, r = 6$	63
sessantatre	16	$q = \frac{63}{16} = 3, r = 15$ $q = \frac{3}{16} = 0, r = 3$	3F

Esercizi sulla conversione di base

- Calcolare base 2 di $(59)_{10}$.
- Calcolare base 2 di $(149)_{10}$.
- Calcolare base 2 di $(283)_{10}$.
- Calcolare base 5 di $(283)_{10}$.
- Calcolare base 8 di $(77)_{10}$.
- Calcolare base 8 di $(1211)_{10}$.
- Calcolare base 8 di $(283)_{10}$.
- Calcolare base 16 di $(283)_{10}$.
- Calcolare base 16 di $(283)_{10}$.

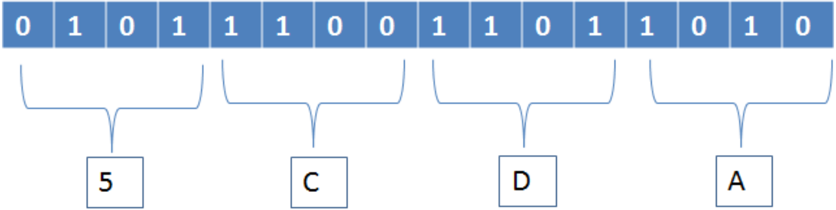
Relazione fondamentale tra basi

- La rappresentazione di un numero in due basi b_1 e b_2 é completamente diversa.
- Se le due basi sono una potenza dell'altra, le rappresentazioni di uno stesso numero sono strettamente correlate.
- Se $b_1 = {b_2}^n$:
  - ogni cifra nella rappresentazione R_1 corrisponde a n cifre nella rappresentazione R_2;
  - ogni cifra esadecimale ($16 = 2^4$) corrisponde a 4 cifre binarie;
  - ogni cifra ottale ($8 = 2^3$) corrisponde a 3 cifre binarie;
  - la conversione di un numero tra base b_1 e base b_2 o viceversa non necessita dell'algoritmo delle divisioni successive;
  - per la conversione basta sostituire ordinatamente ogni cifra di R_1 con gruppi di n cifre di R_2.

Relazione fondamentale tra basi

Caso: $b_1 = 2$ e $b_2 = 16$.

- Consideriamo la conversione dalla base 2 alla base esadecimale.
- $b_2 = 16 = 2^4$.
- Le cifre della base 2 si raggruppano in gruppi di 4.
- Ad ogni gruppo si sostituisce la cifra esadecimale corrispondente.



Relazione fondamentale tra basi

Caso: $b_1 = 2$ e $b_2 = 8$.

- Consideriamo la conversione dalla base 2 alla base ottale.
- $b_2 = 8 = 2^3$.
- Le cifre della base 2 si raggruppano in gruppi di 3.
- Ad ogni gruppo si sostituisce la cifra ottale corrispondente.

$(000\ 100\ 111\ 001)_2 = (0471)_8$

000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Conversioni tra basi con $b_1 = {b_2}^n$ per numeri interi

$b = 2$	$b = 2$	$b = 8$	$b = 2$	$b = 16$
1	1	1	1	1
10	10	2	10	2
11	11	3	11	3
100	100	4	100	4
101	101	5	101	5
1000	1 000	1 0	1000	8
1010	1 010	1 2	1010	A
1111	1 111	1 7	1111	F
10000	10 000	2 0	1 0000	1 0
11111	11 111	3 7	1 1111	1 F
100000	100 000	4 0	10 0000	2 0
1100100	1 100 100	1 4 4	110 0100	6 4
11111111	11 111 111	2 7 7	1111 1111	F F

Conversione da base 10 a base b per numeri razionali

- Si consideri un numero razionale, espresso dalla seguente sequenza di cifre $c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0.c_{-1}\ldots c_{-m}$.
- Si riprenda la formula posizionale:
  $v = \sum_{k=-m}^{k=n-1} c_k \cdot b^k$
- Si consideri la parte frazionaria del numero (ossia le cifre della sequenza a destra del punto):
  $w = c_{-1} \times b^{-1} + c_{-2} \times b^{-2} + \ldots$
- Si moltiplichino entrambi i membri per b:
  $w \times b = c_{-1} + c_{-2} \times b^{-1} + \ldots = c_{-1} + w_1$
- c_{-1} é la parte intera del prodotto di $w \times b$.
- w_1 é la parte frazionaria.
- Applicando ricorsivamente la stessa procedura otteniamo la sequenza di cifre:
  $w \times b = c_{-1} + w_1$
  $w_1 \times b = c_{-2} + w_2$
  $\ldots$
- In caso di numero periodico, la sequenza potrebbe non finire.

Numero periodico

- Cambiando la base di rappresentazione un numero puó diventare periodico.
  - $(0.1)_{10}$ diventa periodico quando lo si converte in base 2.
- La rappresentazione in binario di un numero puó originare errori di approssimazione.

Esercizi di conversione di base

- Calcolare base 5 di $(0.23)_{10}$.
- Calcolare base 2 di $(0.23)_{10}$.
- Calcolare base 8 di $(0.23)_{10}$.
- Calcolare base 16 di $(0.23)_{10}$.
- Calcolare base 5 di $(0.15)_{10}$.
- Calcolare base 2 di $(0.75)_{10}$.