Università degli Studi di Ferrara
Corso di Economia Pubblica

ESERCITAZIONE – BENI PUBBLICI
Testo e soluzioni

Esercizio 1

Un'economia è formata soltanto da due agenti, A e B.

Entrambi possono produrre un bene pubblico *G* utilizzando un bene privato *X*, in accordo alla frontiera di produzione:

(1.1) $X + 2G = 20$

Le funzioni di utilità dei due agenti sono rispettivamente:

(1.2) $U_A = x_A + 2\ lnG$

(1.3) $U_B = x_B + 2\ lnG$

Determinare:

a) l'ammontare ottimo del bene pubblico applicando la regola di Samuelson;

b) la quantità di reddito da impiegare per la produzione del bene pubblico.

Esercizio 2

Si consideri un sistema economico caratterizzato dalla seguente frontiera di produzione:

$$g^2 + 10x^2 = 20$$

Dove *g* indica un bene pubblico e *x* un bene privato.

Nel sistema vi sono 100 individui identici, con la seguente funzione di utilità:

$$U_i = \ln(g) + \ln(x_i)$$

a) Si determinino il Saggio Marginale di Trasformazione (SMT) fra *g* e *x* e il saggio marginale di sostituzione (SMS) fra *g* e x_i.

b) Se i mercati per *g* e *x* fossero competitivi, quali quantità di *g* e *x* verrebbero prodotte?

c) Quali sono i livelli di produzione efficienti di *g* e di *x*?

SOLUZIONI

Esercizio 1

a) Differenziando la frontiera di produzione si ottiene che:

$$dx + 2 \cdot dG = 0$$

$$dx = -2 \cdot dG$$

$$-\frac{dx}{dG} = 2$$

$$SMT = -\frac{dx}{dG} = 2$$

Differenziando la funzione di utilità di A si ottiene che:

$$dx_A + \frac{2}{G} \cdot dG = 0$$

$$dx_A = -\frac{2}{G} \cdot dG$$

$$-\frac{dx_A}{dG} = \frac{2}{G}$$

$$SMS_A = -\frac{dx_A}{dG} = \frac{2}{G}$$

Differenziando la funzione di utilità di B si ottiene che:

$$x_B + \frac{2}{G} \cdot dG = 0$$

$$dx_B = -\frac{2}{G} \cdot dG$$

$$-\frac{dx_B}{dG} = \frac{2}{G}$$

$$SMS_B = -\frac{dx_B}{dG} = \frac{2}{G}$$

In caso di beni pubblici la condizione che assicura l'efficienza allocativa (regola di Samuelson) è la seguente:

$$SMT = \sum_{i=1}^{n} SMS_i = SMS_A + SMS_B$$

Sostituendo troviamo l'ammontare ottimo del bene pubblico (G^*) :

$$2 = \frac{2}{G} + \frac{2}{G}$$

$$2 = \frac{4}{G}$$

$$G^* = 2$$

b) Sostituendo nella frontiera di produzione l'ammontare ottimo del bene pubblico, si trova la quantità di bene privato (reddito) da impiegare per la produzione del bene pubblico ottimale:

$$X + 2 \cdot G^* = 20$$

$$X + 2 \cdot 2 = 20$$
$$X = 16$$

<u>Esercizio 2</u>

a) Differenziando la frontiera di produzione (o curva di trasformazione) si ottiene che:

$$2g \cdot dg + 20x \cdot dx = 0$$
$$20x \cdot dx = -2g \cdot dg$$
$$-\frac{dx}{dg} = \frac{2g}{20x} = \frac{g}{10x}$$
$$SMT = -\frac{dx}{dg} = \frac{g}{10x}$$

Differenziando la funzione di utilità si ottiene che:

$$\frac{1}{g} \cdot dg + \frac{1}{x_i} \cdot dx_i = 0$$
$$\frac{1}{x_i} \cdot dx_i = -\frac{1}{g} \cdot dg$$
$$-\frac{dx_i}{dg} = \frac{x_i}{g}$$
$$SMS_i = -\frac{dx_i}{dg} = \frac{x_i}{g}$$

b) Poiché si ipotizza che tutti gli individui sono identici, si può esprimere la quantità del bene privato richiesta singolarmente come:

$$x_i = \frac{x}{100}$$

Sostituendo nel SMS:

$$SMS_i = \frac{x_i}{g} = \frac{x}{100g}$$

In equilibrio competitivo:

$$SMT = SMS_i$$

Sostituendo il valore del SMT e del SMS:

$$\frac{g}{10x} = \frac{x}{100g}$$
$$100g^2 = 10x^2$$
$$(1.1)\ x^2 = 10g^2 \text{ e } (1.2)\ g^2 = \frac{x^2}{10}$$

Sostituendo l'equazione (1.1) nella frontiera di produzione:

$$g^2 + 10(10g^2) = 20$$

$$g^2 + 100g^2 = 20$$
$$101g^2 = 20$$
$$g^2 = \frac{20}{101}$$
$$g = \sqrt{\frac{20}{101}} = 0{,}44$$
Sostituendo l'equazione (1.2) nella frontiera di produzione:
$$\frac{x^2}{10} + 10x^2 = 20$$
$$x^2 + 100x^2 = 200$$
$$101x^2 = 200$$
$$x^2 = \frac{200}{101}$$
$$x = \sqrt{\frac{200}{101}} = 1{,}40$$
c) La produzione efficiente di un bene pubblico si ha quando la somma dei saggi marginali di sostituzione è uguale al saggio marginale di trasformazione:
$$SMT = \sum_{i=1}^{n} SMS_i = 100 \cdot SMS$$
Sostituendo le equazioni del SMT e del SMS:
$$\frac{g}{10x} = 100 \cdot \frac{x}{100g}$$
$$\frac{g}{10x} = \frac{x}{g}$$
$$g^2 = 10x^2$$
Sostituendo nella frontiera di produzione:
$$10x^2 + 10x^2 = 20$$
$$20x^2 = 20$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1$$
$$g^2 = 10$$
$$g = \sqrt{10} = 3{,}16$$
Si noti che al diminuire della produzione del bene privato (da 1,4 a 1) aumenti la produzione del bene pubblico (da 0,44 a 3,16).