Vettori geometrici e trasformazioni lineari

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Vettori geometrici

Fissiamo innanzitutto un punto O e diamo la seguente definizione.

Definizione (Vettore applicato)

Un vettore applicato *in* O *è un segmento orientato con primo estremo il punto* O *in* $\mathbb{R}^2$ *(o in* $\mathbb{R}^3$*) e secondo estremo un altro punto* P *in* $\mathbb{R}^2$ *(o in* $\mathbb{R}^3$*). Tale vettore è rappresentato da una freccia che parte da* O *e arriva a* P *e indicato come* $\overrightarrow{OP}$.

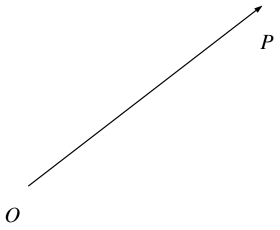

Figura: Vettore applicato.

Esempio

(Vettori e forze) Nell'ambito della fisica i vettori applicati sono utilizzati in diversi contesti. In particolare servono a indicare l'azione di una forza specificando contemporaneamente il punto di applicazione della stessa, l'intensità e la direzione. Tali forze come è noto possono essere sommate originando nuove forze aventi lo stesso punto di applicazione ma una diversa intensità e direzione.

Se indichiamo con V^2 l'insieme dei vettori applicati in O possiamo costruire un'applicazione biiettiva da $\mathbb{R}^2$ a V^2 che ad ogni punto P di $\mathbb{R}^2$ associa il vettore applicato $\overrightarrow{OP}$. In particolare all'origine O viene associato il vettore $\overrightarrow{OO}$ detto vettore nullo. Dunque, una volta fissata l'origine, è evidente che possiamo identificare i punti del piano con i vettori applicati nell'origine. In modo analogo possiamo procedere e costruire una applicazione biiettiva da V^3, spazio dei vettori applicati tridimensionali, a $\mathbb{R}^3$.

Osservazione

Naturalmente un vettore può essere considerato applicato a un qualunque altro punto dello spazio. Per esempio la notazione $\overrightarrow{QP}$ indica un vettore applicato in Q ossia avente come primo estremo il punto Q e secondo estremo il punto P. ∎

La somma di due vettori applicati può essere definita così

Definizione (Regola del parallelogramma)

Dati due vettori applicati $\overrightarrow{OP}$ *e* $\overrightarrow{OQ}$ *in* V^2 *la loro* somma $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ *è data dal vettore applicato* $\overrightarrow{OR}$ *dove* R *è il secondo estremo del vettore applicato* $\overrightarrow{QR}$ *parallelo a* $\overrightarrow{OP}$ *(ossia il vertice del parallelogramma individuato da* O, P *e* Q *come nella Figura.*

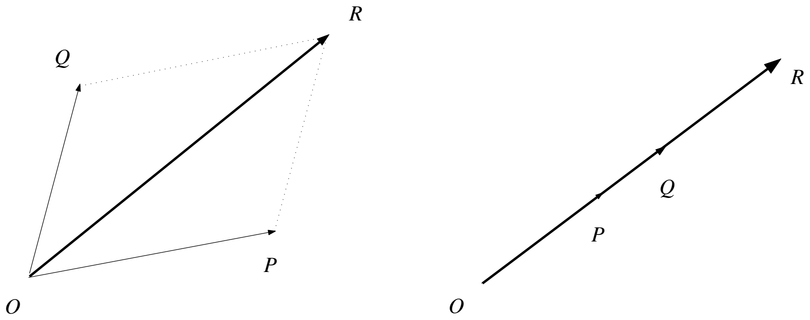

Figura: Regola del parallelogramma (sinistra). Situazione con vettori allineati (destra).

Per vettori in V^3 il vettore somma $\overrightarrow{OR}$ giace nel piano identificato dai vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$.

Possiamo definire anche l'opposto di un vettore applicato. L'opposto del vettore $\overrightarrow{OP}$ è il vettore $-\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$, dove P' è il punto simmetrico di P rispetto ad O sulla retta passante per O e P.

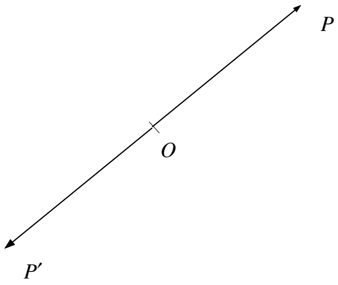

Figura: Opposto di un vettore.

Proposizione

Siano $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ *tre vettori applicati in* V^2 *(o in* V^3*).*

1. *proprietà associativa*

$$(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR});$$

2. *proprietà commutativa*

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP};$$

3. *esistenza elemento neutro*

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OP};$$

4. *esistenza opposto*

$$\overrightarrow{OP} + (-\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OO}.$$

Inoltre possiamo moltiplicare un vettore per un numero reale

Definizione (Prodotto per uno scalare)

Sia α *in* $\mathbb{R}$ *e* $\overrightarrow{OP}$ *in* V^2 *(o in* V^3*) allora il prodotto* $\alpha\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ *dove* Q *è il punto sulla retta per* O *e* P *tale che il rapporto tra la lunghezza del segmento* OP *e quella del segmento* OQ *è uguale a* $|\alpha|$*.*

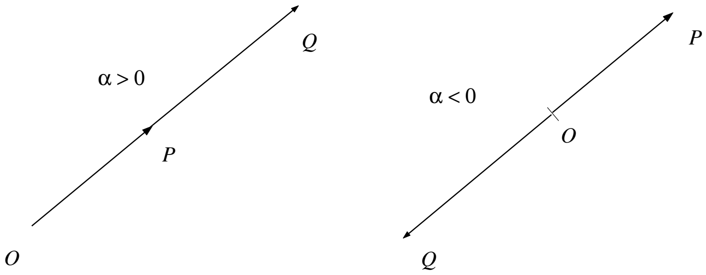

Figura: Moltiplicazione di un vettore per un numero.

Proposizione

Siano $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ *due vettori applicati appartenenti a* V^2 *(o a* V^3*) e* α, β *numeri.*

1. *proprietà distributive*

$$\alpha(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \alpha\overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{OQ};$$

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OP};$$

2. *proprietà associativa*

$$(\alpha\beta)\overrightarrow{OP} = \alpha(\beta\overrightarrow{OP});$$

3. *esistenza elemento neutro e nullo*

$$1 \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}, \quad 0 \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO}.$$

Il contenuto delle proposizioni 1 e 2 può essere riassunto dicendo che V^2 e V^3 sono *spazi vettoriali* su $\mathbb{R}$.

Coordinate

Se ora consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano con origine nel punto O, questo lo si può identificare con l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate (x, y) di numeri reali. Dato un qualunque punto P in $\mathbb{R}^2$ sappiamo che ad esso possiamo associare un unico vettore $\overrightarrow{OP}$ in V^2. In particolare potremo associare ad ogni vettore applicato $\overrightarrow{OP}$ la coppia di coordinate che caratterizza il punto P e potremo scrivere

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dove x e y saranno chiamati le *componenti* del vettore applicato. In modo del tutto analogo introducendo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio possiamo associare ai vettori applicati di V^3 la terna di coordinate (x, y, z) e scrivere

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Le coordinate vengono convenzionalmente scritte come vettori colonna al fine di poter usare in modo più diretto le regole di calcolo dell'algebra lineare.

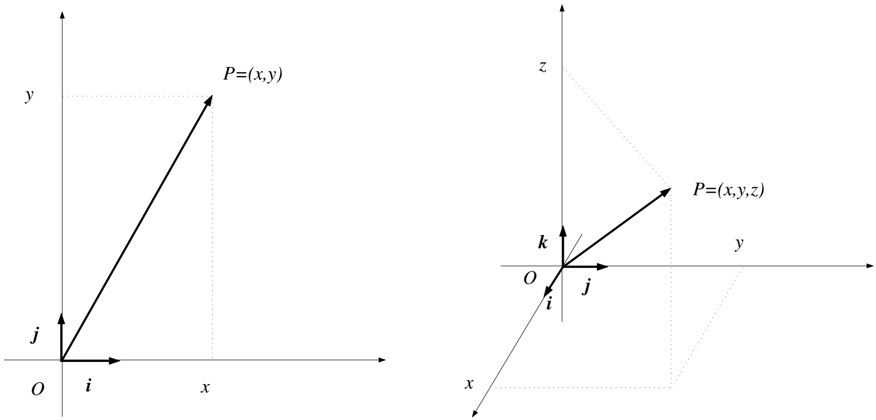

Figura: Vettori e sistemi di coordinate ortogonali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Osservazione

Per indicare un vettore una volta fissato il punto di applicazione O con l'origine del sistema di riferimento si utilizzano anche le notazioni basate sulle lettere dell'alfabeto in grassetto come **v**, **w**, $\ldots$ oppure con il soprassegno di vettore $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\ldots$ Nel seguito per brevità di notazione useremo la prima convenzione. ∎

Abbiamo quindi visto che a ogni vettore applicato $\mathbf{v}$ in V^2 o V^3 è possibile associare un vettore colonna (algebrico) di coordinate.
La *lunghezza* di un vettore o *modulo* del vettore sarà indicata con $|\mathbf{v}|$ e vale rispettivamente

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Il modulo corrisponde quindi alla norma euclidea del vettore colonna algebrico che ne caratterizza le coordinate. Un vettore è quindi caratterizzato da una lunghezza, una direzione (la retta a cui appartiene l'asse del vettore) e un verso (quello della freccia).

Un *versore* o *vettore unitario* è un vettore di lunghezza uno. Dato un qualunque vettore non nullo esso può essere reso unitario

$$\mathrm{vers}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

I versori relativi agli assi coordinati sono indicati con le lettere $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Per esempio in V^2 avremo

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mentre in V^3 avremo

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione

Indichiamo con $\mathbf{i}$ *e* $\mathbf{j}$ *i versori in* V^2 *relativi a un riferimento cartesiano ortogonale. Allora ogni vettore* $\mathbf{v}$ *in* V^2 *di coordinate* x *e* y *può essere scritto come*

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Analogamente in V^3 *avremo* $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Esempio

(Vettori applicati e vettori colonna) Consideriamo il vettore $\mathbf{v}$ in V^2

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

allora

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}.$$

Analogamente per il vettore $\mathbf{v}$ in V^3

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Esempio

(continuazione) Si noti che la somma definita dalla regola del parallelogramma coincide con la somma di vettori algebrici definita nel Capitolo 7. Avremo quindi che dati i vettori

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2+5 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lo stesso discorso vale per la moltiplicazione per uno scalare per cui

$$3\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Esempio

(Coordinate polari e sferiche) Dato il vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

indicando con ϑ in $[0, 2\pi)$ l'angolo compreso tra la retta asse del vettore e l'asse delle x e con $r = |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ abbiamo le relazioni

$$x = r \cos\vartheta, \qquad y = r \sin\vartheta.$$

La coppia (r, ϑ) rappresenta le *coordinate polari* del vettore. Analogamente nel caso di un vettore in V^3

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

abbiamo con $r = |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$x = r \sin\varphi \cos\vartheta, \quad y = r \sin\varphi \sin\vartheta, \quad z = r \cos\varphi.$$

La terna (r, ϑ, φ) rappresenta le *coordinate sferiche* del vettore.

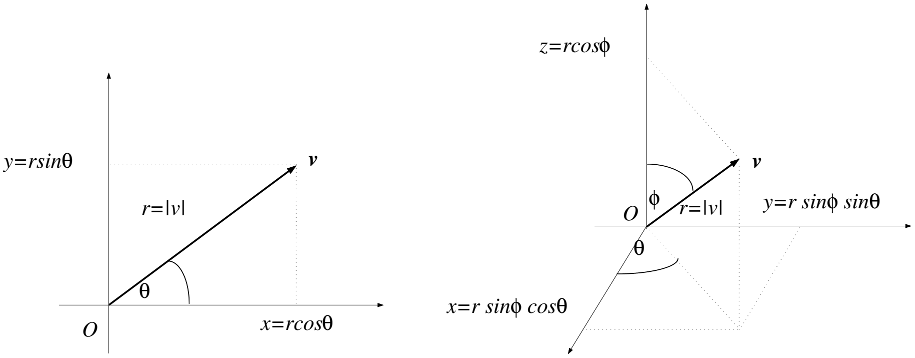

Figura: Coordinate polari e sferiche.

Dati due punti P e Q in $\mathbb{R}^2$ di coordinate rispettivamente (x_1, y_1) e (x_2, y_2) essi individuano il vettore applicato

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

La *distanza tra i due punti* $\overline{PQ}$ sarà uguale alla lunghezza del vettore $\overrightarrow{PQ}$ quindi

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Analogamente nel caso tridimensionale avremo

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Prodotto scalare e vettoriale

Abbiamo osservato come i vettori geometrici nel piano e nello spazio possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i vettori colonna di dimensione 2 e 3 rispettivamente. Sono di immediata verifica le due seguenti proprietà

- Due vettori in V^2 sono linearmente dipendenti se si trovano sulla stessa retta.
- Due vettori in V^3 sono linearmente dipendenti se giacciono nello stesso piano.

Ricordiamo inoltre che il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in V^2 sarà due mentre in V^3 sarà tre.
Il *prodotto scalare* di due vettori

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

risulta quindi definito come

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Analogamente nello spazio avremo

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Abbiamo già visto che tale prodotto soddisfa alle proprietà dell'usuale prodotto righe per colonne delle matrici ossia

1. proprietà distributiva
$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w};$$
2. dato α numero reale
$$(\alpha \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\alpha \mathbf{w}).$$

Il prodotto scalare è chiaramente commutativo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$. Abbiamo inoltre visto che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |v|^2$ e che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ se e solo se i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono *ortogonali*.

Osservazione

Consideriamo il prodotto scalare di un vettore $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ con i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ degli assi coordinati. Otteniamo

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) = x,$$

e analogamente $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = y$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = z$. Ossia il risultato del prodotto scalare è la componente del vettore rispetto al versore. ■

Geometricamente, sia nel piano che nello spazio, vale la seguente

Proposizione

Se indichiamo con φ l'angolo in $[0,\pi]$ compreso tra i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ abbiamo la relazione

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\varphi.$$

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità dimostriamo l'identità in V^2. Utilizzando le coordinate polari $(|\mathbf{v}|,\vartheta)$ e $(|\mathbf{w}|,\psi)$ avremo

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|(\cos\vartheta\cos\psi + \sin\vartheta\sin\psi).$$

Supponendo $\varphi = \vartheta - \psi$ e utilizzando le relazioni

$$\cos\vartheta = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \quad \sin\vartheta = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} &= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|(\cos\vartheta\cos\psi + \sin\vartheta\sin\psi) \\
&= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|(\cos^2\psi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\psi\cos\psi + \sin^2\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cos\psi) \\
&= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\varphi(\cos^2\psi + \sin^2\psi) \\
&= |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\varphi.
\end{aligned}$$

■

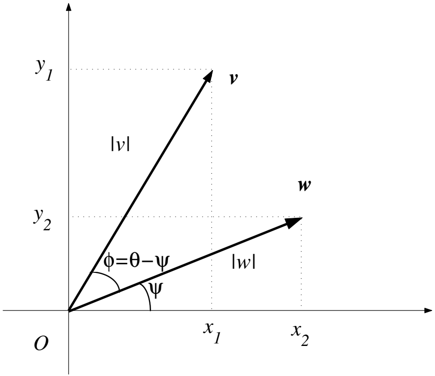

Figura: I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nel piano.

Definizione (Prodotto vettoriale)

Dati due vettori

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

il loro prodotto vettoriale, *denotato con* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *è definito come*

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Un facile modo mnemonico per ricordare la definizione precedente è basato sul determinante. Infatti introdotti i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ della base canonica si ha $\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$. Di conseguenza

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\mathbf{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\mathbf{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\mathbf{k}.$$

Ricordando la regola delle diagonali per il calcolo del determinante abbiamo

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & x_1 & x_2 \\ \mathbf{j} & y_1 & y_2 \\ \mathbf{k} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Dal punto di vista geometrico il prodotto vettoriale è caratterizzato dalla seguente

Proposizione

Dati due vettori $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *il loro prodotto vettoriale* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *è tale che*

1. *il vettore* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *è ortogonale al piano di* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*;*
2. *i vettori* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *e* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *formano una terna destrorsa;*
3. *se indichiamo con* φ *l'angolo in* $[0, \pi]$ *compreso tra i due vettori*

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \varphi.$$

Dalla 3) discende immediatamente che $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ essendo $\varphi = 0$. Inoltre due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono *paralleli* se e solo se $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Osserviamo che la formula 3) indica anche che la lunghezza del vettore $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ è uguale all'area del parallelogramma costruito su $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

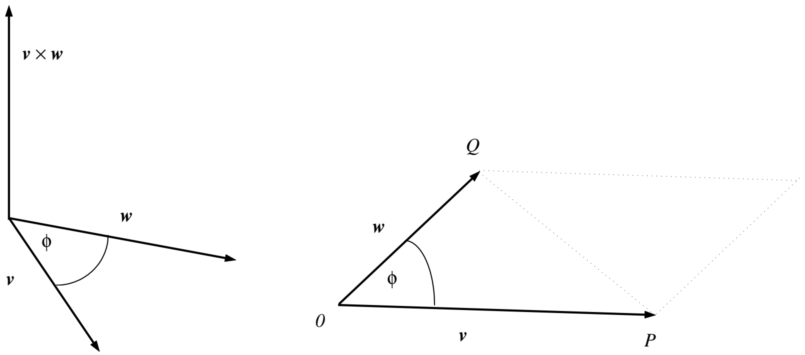

Figura: Prodotto vettoriale e area del triangolo OPQ.

Il prodotto vettoriale infine soddisfa le seguenti proprietà

1. proprietà anticommutativa
$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v};$$
2. proprietà distributiva
$$\mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{w};$$
3. per ogni α numero
$$(\alpha\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\alpha\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Esempio

(Forze e campi) Il concetto di *campo vettoriale* può essere sintetizzato dicendo che equivale ad assegnare in ogni punto P dello spazio un vettore $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$. In ambito elettromagnetico possiamo descrivere la forza $\mathbf{F}$ che agisce sulla carica q che si muove con velocità $\mathbf{u}$ tramite la formula

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

dove $\mathbf{E}$ indica il campo elettrico e $\mathbf{B}$ il campo magnetico nel punto P.

Concludiamo questo paragrafo osservando che dati tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in V^3 il loro *prodotto misto* definito come $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ soddisfa la seguente relazione

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Dalla proprietà precedente deriva anche l'invarianza del prodotto misto rispetto a permutazioni cicliche dei tre vettori ossia[1]

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}).$$

Geometricamente il valore assoluto del prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$. In altre parole il valore assoluto del determinante di una matrice 3×3 rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui vettori colonna della matrice. Abbiamo quindi che $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ se e soltanto se i tre vettori sono linearmente dipendenti ossia sono complanari.

[1] L'uso delle parentesi nella scrittura del prodotto misto è in realtà superfluo in quanto l'espressione $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ non ha senso.

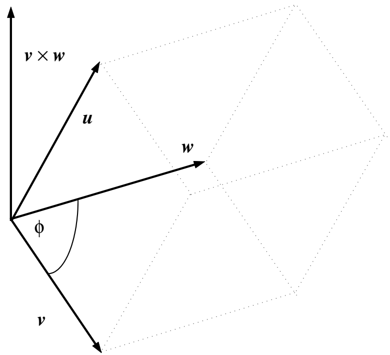

Figura: Prodotto misto e volume del parallelepipedo.

Trasformazioni lineari

Dato un vettore colonna x di dimensione n e una matrice A di dimensione $m \times n$ il prodotto $x' = Ax$ è un vettore colonna di dimensione m. In altre parole la matrice A "trasforma" il vettore x in $\mathbb{R}^n$ nel vettore x' in $\mathbb{R}^m$. Questi tipi di trasformazioni sono detti *trasformazioni lineari* di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. L'esempio più semplice si ha nel caso $A = I$ matrice identità. In tal caso si parla di applicazione identica o *identità*, in quanto ogni vettore è associato a sè stesso.

Esempio

(Trasformazioni lineari) La matrice 3×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

definisce la trasformazione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x' &= \quad x + y \\ y' &= \quad 2x - y \\ z' &= \quad x - 3y. \end{aligned}$$

Tale trasformazione associa a un vettore del piano un vettore dello spazio.

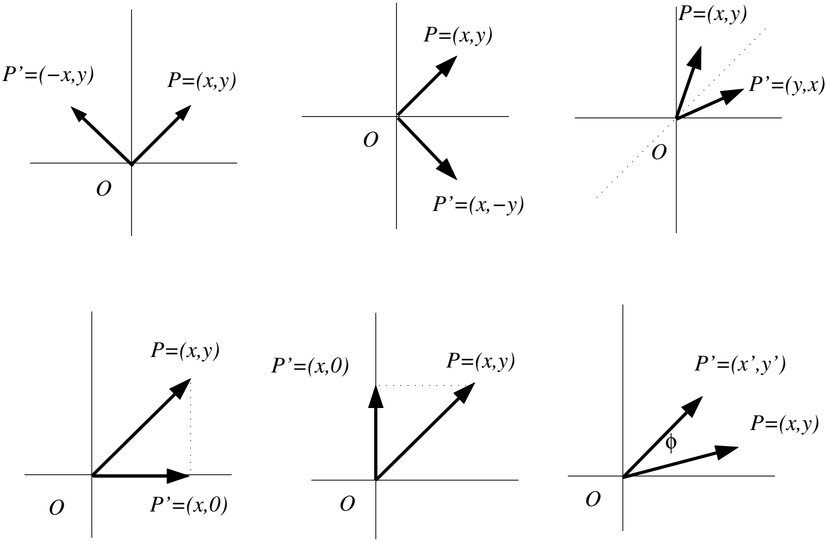

Figura: Tra i più importanti operatori lineari nel piano (e nello spazio) abbiamo le *riflessioni*, le *proiezioni* e le *rotazioni*

Esempio

(Trasformazioni lineari nel piano) Consideriamo un punto P nel piano di coordinate (x, y). Una generica trasformazione lineare del piano è definita dal punto P' di coordinate (x', y') con

$$\begin{aligned} x' = &\quad ax + by \\ y' = &\quad cx + dy \end{aligned}$$

la matrice associata sarà

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- *Operatori di riflessione*
  Una riflessione attorno all'asse y è caratterizzata da

  $$x' = -x, \qquad y' = y.$$

  ossia

  $$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 1.$$

Esempio

Una riflessione attorno all'asse x è caratterizzata da

$$x' = x, \qquad y' = -y.$$

ossia

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = -1.$$

Una riflessione attorno alla retta $y = x$ è caratterizzata da

$$x' = y, \qquad y' = x.$$

ossia

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 0.$$

Esempio

- *Operatori di proiezione ortogonale*
  Una proiezione ortogonale sull'asse delle x è definita da

$$x' = x, \qquad y' = 0$$

ossia

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

Una proiezione ortogonale sull'asse delle y è definita da

$$x' = 0, \qquad y' = y$$

ossia

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 1.$$

Esempio

- *Operatori di rotazione*
  Consideriamo una rotazione (in senso antiorario) attorno all'origine di un'angolo φ. Indicate con (r, ϑ) le coordinate polari di P

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, le coordinate polari di P' saranno

$$x' = r\cos(\vartheta + \varphi), \qquad y' = r\sin(\vartheta + \varphi).$$

In particolare avremo

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\vartheta\cos\varphi - r\sin\vartheta\sin\varphi = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= r\cos\vartheta\sin\varphi + r\sin\vartheta\cos\varphi = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}$$

La matrice A sarà quindi definita da

$$a = \cos\varphi, \quad b = -\sin\varphi, \quad c = \sin\varphi, \quad d = \cos\varphi.$$

ed è detta *matrice di rotazione* di un angolo φ.

In modo analogo è possibile definire riflessioni, proiezioni e rotazioni nello spazio.

Trasformazioni lineari e matrici

Una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è quindi un'applicazione

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

che associa a ogni elemento x di $\mathbb{R}^n$ un unico elemento $x' = L_A(x) = Ax$ di $\mathbb{R}^m$. Il vettore x' si chiama immagine di x attraverso L_A e A di tipo $m \times n$ è la matrice associata alla trasformazione lineare. L'insieme

$$ImL_A = L_A(\mathbb{R}^n) = \{L_A(x) \,|\, x \in \mathbb{R}^n\},$$

è detto *immagine* della trasformazione lineare.
Dalle proprietà delle matrici discende immediatamente che una trasformazione lineare L_A di matrice A soddisfa le seguenti relazioni

- per ogni coppia di vettori x e y in $\mathbb{R}^n$ si ha

$$L_A(x + y) = L_A(x) + L_A(y);$$

- indicato con α un numero in $\mathbb{R}$ si ha

$$L_A(\alpha x) = \alpha L_A(x).$$

Si noti che necessariamente avremo $L_A(0) = 0$ e $L_A(-x) = -L_A(x)$.

Analogamente a quanto fatto per le funzioni reali di variabile reale possiamo definire i concetti di *iniettività* e *suriettività*. Una applicazione lineare L_A si dirà iniettiva se trasforma vettori distinti in vettori distinti, ossia per ogni x' in $\mathbb{R}^m$ esiste un unico x in $\mathbb{R}^n$ tale che $L_A(x) = x'$. Se inoltre $im(L_A) = \mathbb{R}^m$ allora la trasformazione si dirà suriettiva.

Esempio

(Trasformazioni e iniettività) Consideriamo il caso del piano V^2. Dire che una trasformazione di V^2 in V^2 è iniettiva equivale a dire che dati x' e y' il sistema

$$\begin{aligned} x' &= \quad ax + by \\ y' &= \quad cx + dy \end{aligned}$$

nelle incognite x e y ha una unica soluzione. In forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Dall'algebra lineare sappiamo che questo è vero se e solo se la matrice associata è invertibile, ossia se il suo determinante $ad - bc \neq 0$. Per esempio si verifica subito che le riflessioni e le rotazioni sono iniettive mentre le proiezioni non sono iniettive.

Dunque una trasformazione lineare L_A di matrice quadrata A è iniettiva se e solo se la matrice associata A è invertibile. La trasformazione $L_{A^{-1}}$ definita da $L_{A^{-1}}(x) = A^{-1}x$ è detta *inversa* della trasformazione L_A.

Esempio

(Rotazioni in senso orario) Se consideriamo la matrice di rotazione in senso antiorario nel piano

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

la sua inversa è

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

che corrisponde quindi a una rotazione in senso orario nel piano.

Date due matrici A e B di dimensione $m \times q$ e $q \times n$, esse definiscono due trasformazioni lineari L_A e L_B di $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^q$ e di $\mathbb{R}^q$ in $\mathbb{R}^n$. In particolare, $L_A(x)$ è un elemento di $\mathbb{R}^q$ e quindi $L_B(L_A(x))$ è ben definito ed è in $\mathbb{R}^m$. Definiamo la composizione di L_B con L_A e la indichiamo con $L_B \circ L_A$

$$(L_B \circ L_A)(x) = L_B(L_A(x)).$$

Avremo che

$$L_B(L_A(x)) = L_B(Ax) = BAx.$$

Funzioni di più variabili

Le trasformazioni lineari viste nel paragrafo precedente rappresentano un primo esempio di funzioni di più variabili reali. Più precisamente rappresentano un esempio di funzioni vettoriali di una variabile vettoriale.
Possiamo estendere la definizione di funzione reale di una variabile al caso di una funzione reale di n variabili nel modo seguente

Definizione (Funzione reale di più variabili)

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *di* n *variabili reali è una legge che assegna un numero reale unico* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *a ciascun punto* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *appartenente a* *dom*$(f) \subseteq \mathbb{R}^n$*, detto* dominio *della funzione.*

In modo analogo si definisce l'immagine *im*(f) della funzione. L'estensione del concetto di intervallo è effettuata in modo naturale considerando il prodotto cartesiano di intervalli di $\mathbb{R}$.

Esempio

(Grafici di funzioni reali di più variabili) Consideriamo il caso di funzioni di due variabili reali $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Per esempio le funzioni

$$f(x,y) = \frac{-6y}{2+x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

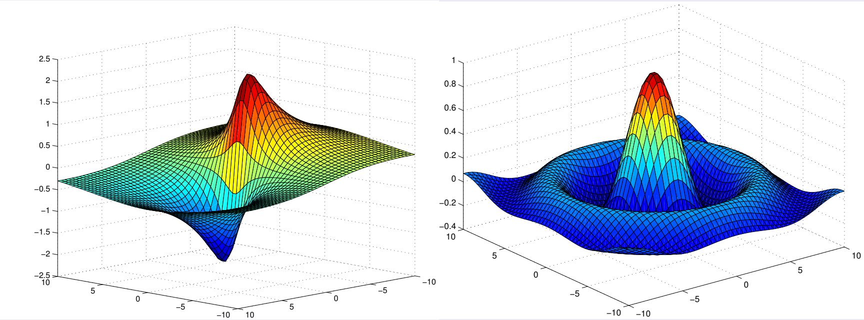

Figura: Grafici di superficie delle funzioni.

Esercizi

Esercizio

In ciascuno dei seguenti casi si scrivano le coordinate e si rappresenti graficamente il vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$.

$(i)\ P = (0,0,0),\ Q = (2,-1,3), \quad (ii)\ P = (3,4,1),\ Q = (1,2,-1), \quad (iii)\ P = (2,2,2),\ Q$

Esercizio

Per ogni vettore assegnato si determini un vettore unitario avente la stessa direzione

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (iv)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio

Siano $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *due vettori non nulli. Si dimostri che* $|\mathbf{v}+\mathbf{w}| = |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$ *se e solo se* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *hanno direzioni uguali o opposte.*

Esercizio

Si calcoli il prodotto vettore per ognuna delle seguenti coppie di vettori

$$(i)\ \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad (ii)\ \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \quad (iii)\ \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \quad (iv)\ \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Esercizio

Calcolare le aree dei triangoli OPQ dove i punti P e Q hanno coordinate date dall'Esercizio 1.

Esercizio

Si calcoli il volume del parallelepipedo avente un vertice nel punto $P_0(-1, 1, 2)$ ed i vertici adiacenti nei punti $P_1(1, 0, -1)$, $P_2(1, 0, 1)$ e $P_3(0, 1, 0)$.

Esercizio

In ciascuno dei seguenti casi si determini se l'intersezione dei tre piani con la retta assegnata è un solo punto, una retta, oppure non c'è intersezione

$$(i)\ \begin{aligned} x-2y-3z &= -1 \\ y+2z &= 1 \\ 2x+y+4z &= 3 \end{aligned} \qquad (ii)\ \begin{aligned} x+3z &= -1 \\ 2x-y+z &= 2 \\ x+2y-z &= 5 \end{aligned} \qquad (iii)\ \begin{aligned} x+3y+5z &= 0 \\ y+2z+3z &= 0 \\ x-z &= 1 \end{aligned}$$

Esercizio

Determinare le matrici di rotazione attorno all'asse x, all'asse y e all'asse z in V^3.