Equazioni differenziali

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Introduzione alle equazioni differenziali

- Le equazioni differenziali rappresentano uno degli strumenti più efficaci per la costruzione di modelli matematici.
- Esse sono utilizzate nei più svariati campi dell'ingegneria e delle scienze applicate: dalla fisica alla biologia, dall'informatica alla chimica.
- Dal punto di vista matematico si chiama *equazione differenziale* (ordinaria) una relazione tra una variabile indipendente t, una funzione incognita $u(t)$ e alcune delle sue derivate, del tipo

$$F(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n)}(t)) \ = \ 0,$$

  dove F è una funzione definita su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^{n+2}$. Se F dipende effettivamente da $u^{(n)}$ si dice che l'equazione ha *ordine n*.
- Solitamente t rappresenta una variabile (per esempio il tempo) rispetto a cui un certo sistema fisico (biologico, chimico,...) evolve secondo determinate leggi.

Esempio

Consideriamo la seguente equazione differenziale

$$u'(t) = -5u(t) + 6 + 5t.$$

Possiamo verificare che la funzione

$$u(t) = 1 + t + e^{-5t}$$

la soddisfa, ossia è una soluzione dell'equazione differenziale.
Infatti derivando la soluzione si ha

$$u'(t) = 1 - 5e^{-5t},$$

e per il termine a destra del segno di uguaglianza

$$-5u(t) + 6 + 5t = -5(1 + t + e^{-5t}) + 6 + 5t = 1 - 5e^{-5t}.$$

Definizione

Una funzione $u : I \to \mathbb{R}$*, dove* I *è un intervallo e* u *è derivabile* n *volte, si dice* $soluzione$ *dell'equazione differenziale ordinaria, se*

$$(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n)}) \in A \subset \mathbb{R}^{n+2},$$

per $t \in I$ *e*

$$F(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n)}(t)) \ = \ 0, \quad \forall\, t \in I.$$

Stiamo utilizzando funzioni F in più variabili, si immagini, come esempio caratteristico, una funzione definita per valori in un sottoinsieme del piano $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che alla coppia $(x, y) \in A$ associa $F(x, y) \in \mathbb{R}$.
Se è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo, l'equazione si dice in *forma normale*,

$$u^{(n)} = f(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n-1)}(t)),$$

dove ora $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.
Se funzione F è lineare rispetto a ciascuna delle variabili $u,\ u',\ u^{(2)}...,\ u^{(n)}$, si ha

$$a_0(t)u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + ... + a_n(t)u(t) = b(t),$$

e l'equazione si dice *lineare*.

Esempio

(Primitive) Data $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, cerchiamo le funzioni derivabili in I tali che

$$u'(t) = f(t), \quad \forall\, t \in I.$$

Si tratta del problema della ricerca delle primitive della funzione f in I. Se, per esempio, la funzione f è una funzione continua è noto che il problema ha un insieme di soluzioni indicato con

$$\int f(t)\ dt.$$

Due soluzioni differiscono per una costante e la funzione $f(t)$ determina, in ogni punto, la pendenza della retta tangente alla curva $u(t)$.
Nel caso in cui si imponga alla soluzione di passare per un punto assegnato $u(t_0) = u_0$ (*problema di Cauchy* o condizione iniziale) il problema ha una sola soluzione data da

$$\int_{t_0}^{t} u'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\ ds \Rightarrow u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\ ds.$$

Esempio

(Continuazione) Per esempio la soluzione del problema di Cauchy (su tutta la retta reale, $I = \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} u'(t) = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

si ottiene tramite una semplice integrazione

$$\int_0^t u'(s)ds = \int_0^t sds \Rightarrow u(t) = u(0) + \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t$$

e quindi

$$u(t) = 1 + t^2/2.$$

È facile verificare che la soluzione trovata verifica l'equazione differenziale e la condizione iniziale, la soluzione trovata è anche unica.

Esempio

(Fenomeni di decadimento) Indicando con $N(t)$ il numero di atomi di un certo elemento presenti al tempo t, tale numero diminuirà per via del fenomeno della radioattività in modo proporzionale al numero stesso di atomi $N(t)$, abbiamo quindi la seguente equazione differenziale per il decadimento radioattivo,

$$N'(t) = -\lambda N(t) \tag{1}$$

dove la costante λ è positiva (costante di decadimento della sostanza in considerazione). Sia noto il valore iniziale $N(t_0) = N_0 > 0$, se $N(t) \neq 0$ possiamo dividere per $N(t)$ e integrare tra t_0 e t

$$\int_{t_0}^{t} \frac{N'(s)}{N(s)} ds \;=\; \int_{t_0}^{t} -\lambda ds,$$

da cui,

$$\ln|N(t)| - \ln|N_0| = -\lambda(t - t_0) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

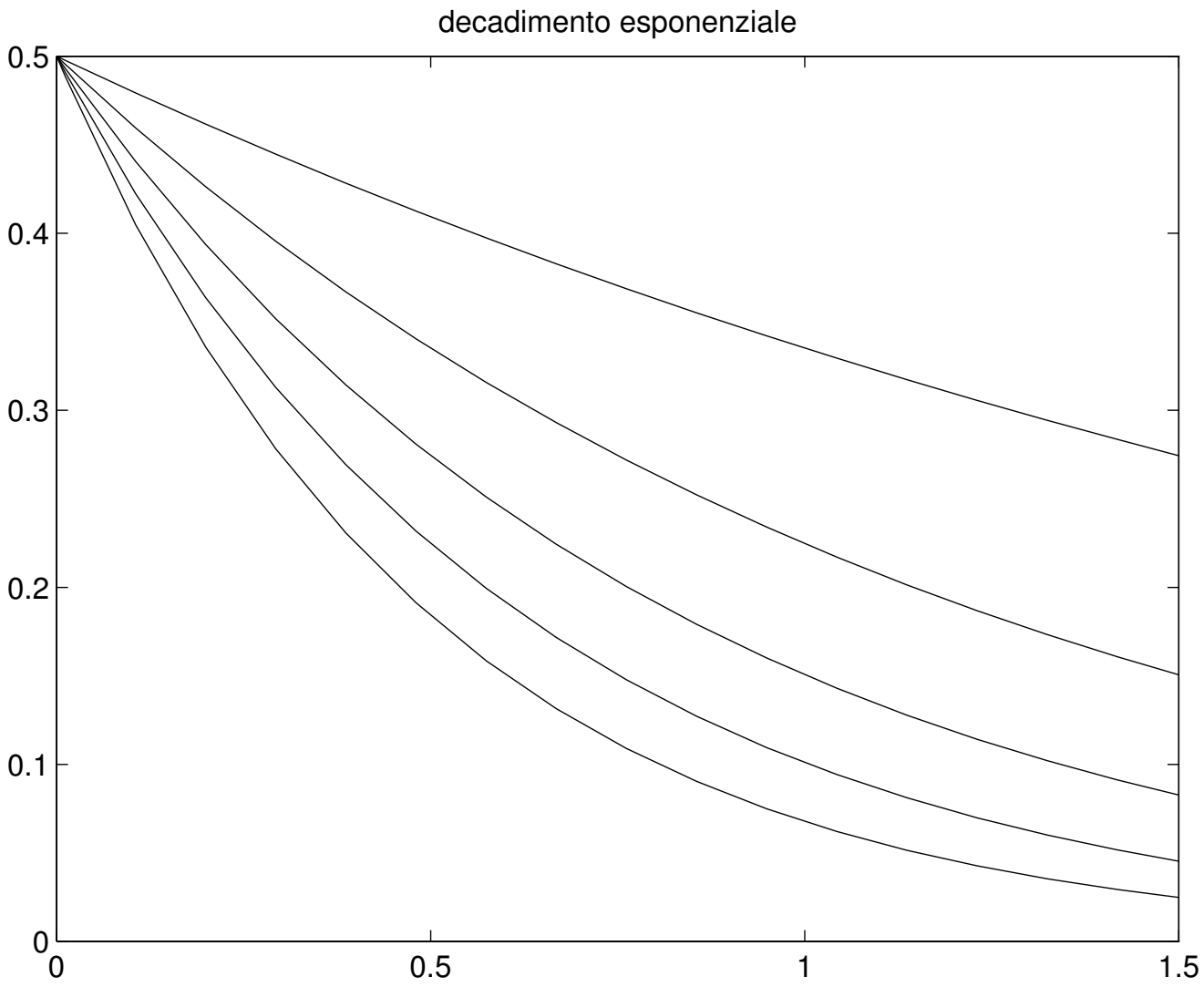

Figura: Soluzioni tipiche per l'equazione differenziale del decadimento radioattivo.

Esempio

(Continuazione) Un'applicazione dell'equazione del decadimento radioattivo riguarda la datazione di reperti archeologici o di opere d'arte.
Dall'espressione della soluzione si ottiene

$$(t - t_0) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(N_0 / N(t) \right)$$

e quindi, dalla conoscenza della costante di decadimento λ e delle quantità $N(t)$ e N_0 riferite ad una certa sostanza presente nel reperto, è possibile stimare l'età $(t - t_0)$ del reperto stesso. In realtà λ e $N(t)$ sono disponibili mentre N_0 non è noto e occorre determinarlo indirettamente da proprietà del materiale.
Per fenomeni di crescita, ad esempio crescita di una popolazione (animali, batteri,...), si considerano invece equazioni con λ parametro positivo. La soluzione in questo caso rappresenta una crescita esponenziale.

Esempio

(Equazioni di un moto) Consideriamo un punto materiale P di massa m soggetto a una forza $F(t)$, la legge di Newton del moto (consideriamo un moto unidimensionale) fornisce l'equazione

$$F(t) = mu''(t) \tag{2}$$

dove $u(t)$ è la posizione del punto, rispetto ad un certo sistema di riferimento, al tempo t. L'equazione della dinamica del punto si può scrivere come

$$u''(t) = F(t)/m. \tag{3}$$

Il moto del punto può quindi essere descritto da una equazione differenziale del secondo ordine. Nota la forza F potremmo trovare una soluzione dell'equazione integrando due volte l'equazione del moto. Fissato un punto (t_0, u_0) possiamo determinare una sola soluzione? In questo caso è intuitivo che non è possibile, occorre una ulteriore condizione: dal punto di vista dinamico significa che la sola posizione iniziale non è sufficiente a determinare il moto ma, per esempio, anche la velocità iniziale del punto è necessaria per determinare univocamente $u(t)$.

Esempio

(Continuazione)
Sia t_0 il tempo iniziale e $t > t_0$, integrando la (3), posto $f(t) = F(t)/m$ con F continua, si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} u''(s)ds \;=\; \int_{t_0}^{t} f(s)ds \;=\; u'(t) - u'(t_0)$$

e integrando ancora

$$\int_{t_0}^{t} u'(s)ds \;=\; \int_{t_0}^{t} \left(u'(t_0) + \int_{t_0}^{x} f(s)ds \right) dx$$

da cui

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(u'(t_0) + \int_{t_0}^{x} f(s)ds \right) dx.$$

Dalla conoscenza dei valori $u(t_0),\ u'(t_0)$ possiamo determinare una soluzione che sarà anche l'unica.

Equazioni del secondo ordine

In generale una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine ha la forma

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)).$$

Nelle applicazioni non sempre vengono fornite le due condizioni iniziali (il valore iniziale e la sua derivata) ma altre due condizioni, un valore iniziale $u(a) = u_a$, per un certo $t = a$, e un valore "finale" $u(b) = u_b$. Il problema che si ottiene si chiama *problema ai limiti* (o problema ai *valori al contorno*). Nel caso del precedente esempio, il problema ai valori iniziali consiste nel fornire la posizione e la velocità iniziale insieme alla legge del moto mentre il problema ai limiti corrisponde a fornire la posizione iniziale, la posizione finale e la legge del moto.

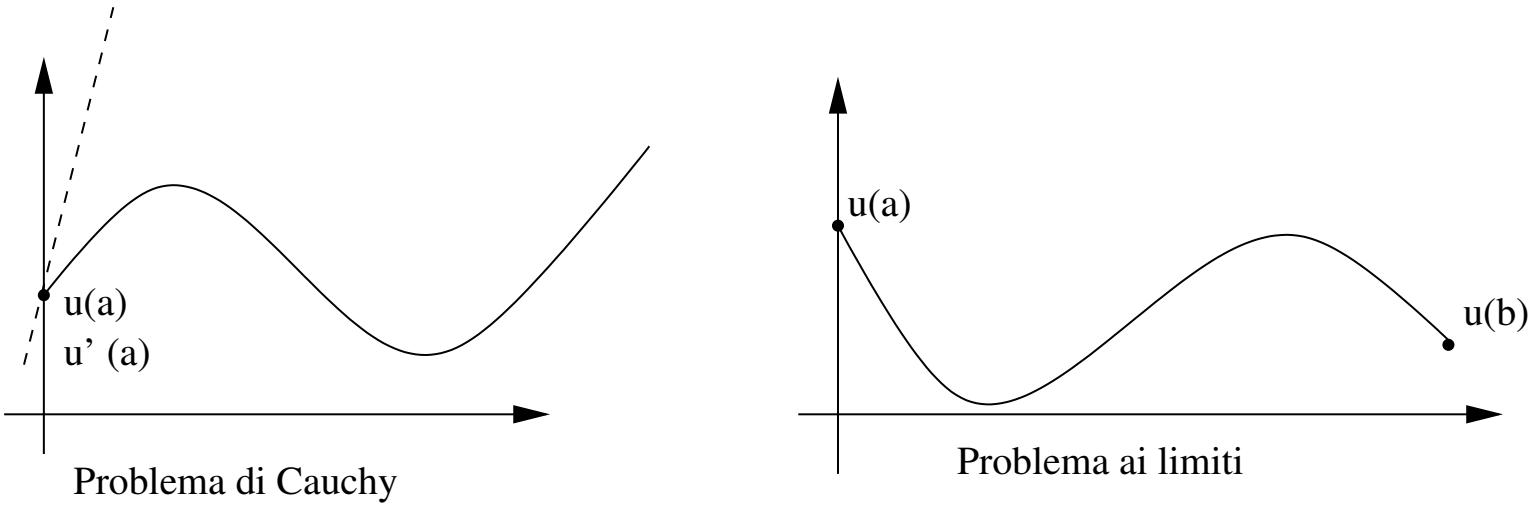

Figura: Problema ai valori iniziali (di Cauchy) e problema ai limiti.

Si noti inoltre che è possibile riscrivere il problema del secondo ordine come un *sistema di equazioni differenziali del primo ordine*. Posto infatti $u_1(t) = u(t)$, $u_2(t) = u'(t)$ si ottiene il sistema (equivalente all'equazione di partenza)

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = f(t, u_1(t), u_2(t)) \end{cases}$$

Possiamo inoltre introdurre una ulteriore variabile per t, $u_3(t) = t$, da cui si ottiene il seguente sistema equivalente al precedente e all'equazione del secondo ordine di partenza

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = f(u_3(t), u_1(t), u_2(t)) \\ u_3'(t) = 1 \end{cases}$$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u'(t) &= a(t)b(u(t)) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{4}$$

con

$$a : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{continua}, \quad I \ \text{ intervallo}$$

$$b : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{continua}, \ \text{con derivata prima continua}, \quad J \ \text{ intervallo}.$$

e $t_0 \in I$, $u_0 \in J$. L'equazione (4) è detta, per la sua forma, *equazione a variabili separabili*, $f(t,u) = a(t)b(u(t))$.
Innanzi tutto osserviamo che se $\overline{u} \in J$ è tale che $b(\overline{u}) = 0$, allora la funzione costante $u(t) = \overline{u}$ è soluzione dell'equazione in I. Quindi a ogni radice della funzione b è associata una soluzione, costante, dell'equazione differenziale.
Limitiamoci quindi a cercare le soluzioni $u(t)$ tali che $b(u(t)) \neq 0, \quad t \in I_0$, con u che varia in un sottointervallo K di J.

Abbiamo

$$\frac{u'}{b(u(t))} = a(t) \quad \forall\, t \in I_0 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{u'(t)}{b(u(t))} dt = \int a(t) dt.$$

Nell'integrale a primo membro consideriamo la sostituzione $x = u(t)$

$$\left(\int \frac{dx}{b(x)} \right)_{x=u(t)} = \int a(t) dt.$$

Se $A(t)$ e $B(x)$ sono due primitive di a su I_0 e di $1/b$ su K, si ha

$$B(u(t)) = A(t) + C, \tag{5}$$

con C costante reale. Ma $B'(x) = 1/b(x)$ conserva su K segno costante, pertanto B è strettamente monotona su K e quindi invertibile. Se B^{-1} indica l'inversa di B, si ha

$$u(t) = B^{-1}\left(A(t) + C\right).$$

Esempio

(Un esempio a variabili separabili) Cerchiamo, per esempio, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'(t) = e^{-u(t)}\left(t + t^3\right) \tag{6}$$

È un'equazione a variabili separabili con, seguendo le notazioni proposte, $a(t) = (t + t^3)$, $b(u) = e^{-u}$. La funzione b non ha zeri per cui non abbiamo soluzioni costanti. Integrando l'equazione si ottiene

$$\int u'(t)e^{u(t)}dt = \int (t + t^3)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + C$$

e quindi, osservando che nel primo integrale vi è la derivata di una funzione composta,

$$e^{u(t)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + C \Rightarrow u(t) = \ln\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + C\right).$$

Nel caso si abbia da risolvere un problema di Cauchy con $u(t_0) = u_0$ per l'equazione a variabili separabili, si può procedere in due modi. Un modo consiste nell'utilizzare la formula (5) da cui si ricava $C = B(u_0) - A(t_0)$; è necessario ricordare che poi per passare alla forma esplicita occorre usare l'inversa della funzione B sull'intervallo K che contiene u_0. Un altro modo consiste nel risolvere l'equazione usando l'integrazione definita

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{b(u(s))} ds \;=\; \int_{t_0}^{t} a(s) ds.$$

Anche qui, usiamo la sostituzione $x = u(s)$,

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{dx}{b(x)} \;=\; \int_{t_0}^{t} a(s) ds$$

da cui

$$B(u(t)) - B(u(t_0)) = A(t) - A(t_0)$$

ed infine

$$u(t) = B^{-1}\left(B(u(t_0)) + A(t) - A(t_0)\right).$$

Esempio

Consideriamo, per esempio, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = \sin\left(u(t)\right) \\ u(0) = \dfrac{11}{2}\pi. \end{cases}$$

Seguendo la seconda strada:

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{\sin\left(u(s)\right)} ds = \int_0^t 1 \; ds$$

ovvero

$$\int_{11\pi/2}^{u(t)} \frac{dx}{\sin x} = t$$

e, poichè $\sin\left(11\pi/2\right) < 0$, abbiamo

$$\left[\ln\left(-\tan(t/2)\right)\right]_{11\pi/2}^{u(t)} = t \quad \Longrightarrow \quad u(t) = 2\left(\arctan(-e^t) + 3\pi\right).$$

Equazioni lineari del primo ordine

Consideriamo in questo paragrafo le equazioni lineari del primo ordine

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t) \tag{7}$$

dove le funzioni a e b sono continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se riuscissimo a riscrivere l'equazione come

$$\frac{d}{dt}\text{“}\textit{qualcosa}\text{”} = b(t)$$

allora potremmo integrare l'espressione per individuare il termine "$qualcosa$". Ma il termine $u'(t) + a(t)u(t)$ non è la derivata di qualche semplice espressione. Moltiplichiamo entrambi i membri per una funzione continua $\mu(t)$, si ottiene

$$\mu(t)u'(t) + \mu(t)a(t)u(t) = \mu(t)b(t).$$

Scegliamo ora, se è possibile, la funzione $\mu(t)$ in modo tale che $\mu(t)u'(t) + \mu(t)a(t)u(t)$ sia la derivata di una funzione. Si osservi che

$$\frac{d}{dt}\mu(t)u(t) = \mu(t)\frac{d}{dt}u(t) + u(t)\frac{d}{dt}\mu(t)$$

e dunque $\mu(t)u'(t) + \mu(t)a(t)u(t)$ è la derivata di $\mu(t)u(t)$ se e solo se

$$\mu'(t) - a(t)\mu(t) = 0.$$

Possiamo quindi scegliere una soluzione di tale equazione per ricondurci a un caso "semplice". Per quanto detto sulle equazioni a variabili separabili si trova che una soluzione è (fissando la costante di integrazione uguale a uno)

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$$

Con questa scelta di $\mu(t)$ l'equazione (19) diventa

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)u(t)) = \mu(t)b(t)$$

integrando si ottiene

$$\mu(t)u(t) = \int \mu(t)b(t)dt + C$$

e quindi

$$u(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)b(t)dt + C\right) = e^{-\int a(t)dt}\left(\int \mu(t)b(t)dt + C\right).$$

Nel caso del problema di Cauchy con la usuale condizione iniziale $u(t_0) = u_0$, è possibile usare l'integrazione definita nella (20),

$$\mu(t)u(t) - \mu(t_0)u_0 = \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds$$

e quindi

$$u(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\mu(t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds \right).$$

Ovviamente si potrebbe seguire la via della ricerca dell'integrale generale dell'equazione differenziale e poi trovare la costante C utilizzando la condizione iniziale.

Metodo della variazione della costante

Un ulteriore modo di considerare la soluzione del problema di Cauchy consiste nel *metodo della variazione della costante*. Si considera dapprima l'equazione omogenea corrispondente

$$u'(t) + a(t)u(t) = 0$$

la cui soluzione generale è della forma (si può considerare ancora come un'equazione a variabili separabili)

$$u(t) = Ce^{-\int a(t)dt}.$$

Cerchiamo ora di soddisfare l'equazione non omogenea considerando la C come una funzione di t (equivale a cambiare le variabili)

$$u(t) = C(t)e^{-\int a(t)dt}$$

e sostituendo nella (7) si ottiene

$$C'(t)e^{-\int a(t)dt} - C(t)a(t)e^{-\int a(t)dt} + C(t)a(t)e^{-\int a(t)dt} = b(t),$$

ossia

$$C'(t) = b(t)e^{\int a(t)dt}.$$

Integrando quest'ultima equazione si trova

$$C(t) = \int b(t)e^{\int a(s)ds}dt + C_1$$

e quindi

$$u(t) = C(t)e^{-\int a(t)dt} = C_1 e^{-\int a(t)dt} + e^{-\int a(t)dt} \int b(t)e^{\int a(s)ds}dt$$

Pertanto, la soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea è uguale alla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente e di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, che si ottiene quando $c_1 = 0$. Per il problema di Cauchy la costante c_1 si può ottenere dalla condizione iniziale.

Esempio

(Esempio I) Troviamo la soluzione del problema di Cauchy

$$u'(t) + 2tu(t) = t, \quad u(1) = 2.$$

Abbiamo, utilizzando le medesime notazioni introdotte sopra,

$$\mu(t) = e^{\int 2tdt} = e^{t^2}$$

e quindi occorre considerare l'equazione

$$\frac{d}{dt}(e^{t^2}u(t)) = te^{t^2}$$

da cui

$$\int_1^t \frac{d}{ds}(e^{s^2}u(s))ds \;=\; \int_1^t se^{s^2}ds$$

e ancora

$$\left[e^{s^2}u(s)\right]_1^t = \left[\frac{e^{s^2}}{2}\right]_1^t.$$

Esempio

(Continuazione) Infine

$$e^{t^2}u(t) - 2e = \frac{e^{t^2}}{2} - \frac{e}{2}.$$

Possiamo allora scrivere la soluzione,

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{3e}{2}e^{-t^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{1-t^2}.$$

Analogamente si poteva considerare l'equazione omogenea

$$u'(t) + 2tu(t) = 0$$

che ha soluzione $u(t) = Ce^{-t^2}$. Preso $C = C(t)$ e sostituendo nella non omogenea si ha

$$C'(t)e^{-t^2} - 2tC(t)e^{-t^2} + 2tC(t)e^{-t^2} = t$$

da cui

$$C'(t) = te^{t^2}.$$

Esempio

(Continuazione) Integrando quest'ultima equazione si trova

$$C(t) = C_1 + \frac{e^{t^2}}{2}$$

e quindi

$$u(t) = \left(C_1 + \frac{e^{t^2}}{2}\right) e^{-t^2} = C_1 e^{-t^2} + \frac{1}{2},$$

imponendo la condizione iniziale

$$u(1) = C_1 e^{-1} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{3e}{2}$$

si ricava la costante C_1 e quindi la soluzione.

Esempio

(Esempio II) Cerchiamo la soluzione generale dell'equazione

$$u'(t) - \frac{u(t)}{t} = t^2.$$

Integrando l'equazione omogenea corrispondente

$$u'(t) - \frac{u(t)}{t} = 0 \Rightarrow u(t) = Ct$$

e, supponendo c funzione di t e sostituendo nell'equazione di partenza,

$$C'(t)t + C(t) - \frac{C(t)t}{t} = t^2$$

da cui

$$C(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 \quad \Longrightarrow \quad u(t) = c_1 t + t^3/2.$$

Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione omogenea

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0, \quad a, b, c \text{ costanti.} \tag{8}$$

In analogia con le equazioni del primo ordine cerchiamo una soluzione del tipo $z(t) = e^{st}$ con s parametro reale. Sostituendo si ottiene

$$e^{st}(as^2 + bs + c) = 0.$$

Perciò la funzione z è soluzione se la costante s è una radice dell'equazione

$$as^2 + bs + c = 0,$$

detta *equazione caratteristica*.

Distinguiamo tre casi.

1) $b^2 - 4ac > 0$, l'equazione caratteristica da due radici reali s_1 e s_2, le funzioni $z_1(t) = e^{s_1 t}$ e $z_2(t) = e^{s_2 t}$ sono due soluzioni distinte e indipendenti, La soluzione generale ha forma

$$u(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t},$$

con $C_1,\ C_2$ costanti opportune.

2) $b^2 - 4ac < 0$, non vi sono radici reali. Posto $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = (\sqrt{(4ac - b^2)})/(2a)$, vi sono due soluzioni reali indipendenti

$$z_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad z_1(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

L'integrale generale ha forma

$$u(t) = e^{\alpha t} \left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \right).$$

3) $b^2 = 4ac$, l'equazione caratteristica ha una radice doppia, $s_1 = -b/2a$. Con il metodo di variazione delle costanti si trova l'integrale generale

$$u(t) = e^{s_1 t} \left(C_1 + C_2 t \right).$$

Esempio

Per esempio per l'equazione

$$u''(t) + 4u'(t) + 13u(t) = 0,$$

l'equazione caratteristica è

$$s^2 + 4s + 13 = 0.$$

Per questa equazione

$$\Delta = 4^2 - 13 \cdot 4 = -36 < 0,$$

ci troviamo nel secondo caso. La soluzione generale dell'equazione è

$$u(t) = e^{-2t} \left(C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) \right).$$

Esercizi

Esercizio

Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali (verificare attraverso derivazione che l'integrale trovato soddisfa l'equazione data)

$$(i)\ u'(t) - \frac{u(t)}{t} = t^2; \quad (ii)\ u'(t) = u(t) + 1;$$

$$(iii)\ u'(t) - tu(t) = t^3; \quad (iv)\ u''(t) + 7u'(t) + 10u(t) = 0.$$

Esercizio

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy,

$$(i)\ u'(t) + 2u(t) = 2e^t,\ u(0) = 1; \quad (ii)\ u'(t) - 2tu(t) = t,\ u(0) = \frac{1}{2};$$

$$(iii)\ 2u''(t) + 5u'(t) - 3u(t) = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0;$$

$$(iv)\ \ u'(t) = u(t)\frac{\cos t}{\sin t} + t\sin^2 t,\ u(\pi/2) = 1.$$