Integrali impropri e serie

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Integrali impropri

Esempio (Intervallo di integrazione non limitato)

Consideriamo la funzione $f(x) = 1/x^2$ con $x \in [1, +\infty)$. Ha senso chiedersi quanto vale l'area sottesa il grafico di $f(x)$, dunque l'integrale di $f(x)$ su $[1, +\infty)$?

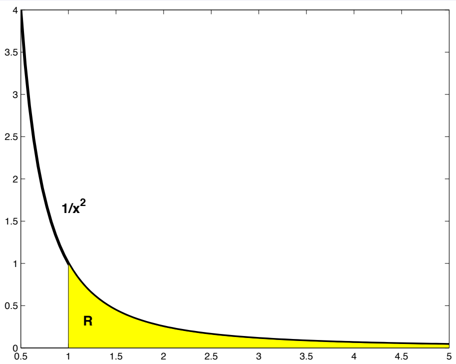

Figura: Come possiamo calcolare l'area della regione R?

Esempio (Continuazione)

Se consideriamo l'intervallo limitato $[1, b]$, $b > 1$, abbiamo

$$A(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Un modo sensato per valutare l'area della regione R sottesa il grafico di $f(x)$ é quello considerare valori di b sempre piú grandi e dunque di ricorrere ad una operazione di limite. Potremmo definire, se esiste, come area della regione R sottesa il grafico il limite, per $b \to +\infty$, delle aree $A(b)$, ossia

$$\text{area}(R) = \lim_{b \to +\infty} A(b).$$

Per l'esempio fatto si ottiene

$$\text{area}(R) = \lim_{b \to +\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$$

.

Definizione

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua (oppure localmente integrabile). Se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt,$$

la funzione si dice $integrabile\ in\ senso\ improprio$ *sull'intervallo* $[a, +\infty)$, *il limite si dirà* $integrale\ improprio$ *(o* $generalizzato$*) di* f *in* $[a, +\infty)$ *e si indicherà con*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

In modo analogo si definisce l'integrale improprio (generalizzato)

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)dt = \int_{-\infty}^b f(t)dt,$$

per $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continua (o localmente integrabile). In entrambi i casi se il limite esiste finito si dice che l'integrale improprio *converge*, se il limite esiste ma è uguale a $\pm\infty$ si dice che l'integrale improprio *diverge*.

Per una funzione continua

$$f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R},$$

possiamo considerare l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx,$$

spezzando l'integrale in due integrali separati:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

per un fissato punto $a \in \mathbb{R}$. Se entrambi gli integrali sono convergenti la funzione f si dice integrabile in senso improprio su tutta la retta reale $\mathbb{R}$.

Esempio (Non sempre l'integrale converge)

Consideriamo ora l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx,$$

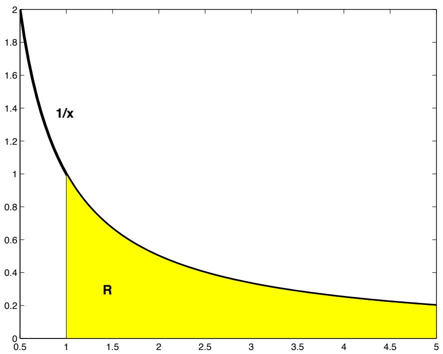

Figura: Esempio di integrale divergente.

Esempio (Continuazione)

In questo caso

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^x = \ln x.$$

Si deduce che

$$\lim_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$$

e quindi l'integrale è divergente.

Esempio (Convergenza e scelta dell'intervallo non limitato)

Valutiamo

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx.$$

Abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 e^t dt = \lim_{x \to -\infty} e^t \Big|_x^0 = 1.$$

Analoghi calcoli mostrano che e^x non è invece integrabile su $[0, +\infty)$.

Esempio (Integriamo su tutta la retta reale)

Valutiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Introduciamo un punto intermedio, per esempio $a = 0$ e consideriamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to-\infty} \arctan x \Big|_{b}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque essendo f pari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

Funzioni non limitate

Consideriamo una funzione continua $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, con un asintoto verticale $x = a$. La funzione non è limitata. Anche per questo tipo di funzioni la definizione usuale di integrale non si applica.

Esempio (Integrazione e asintoti verticali)

La funzione $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x \in (0, 1]$ ha un asintoto verticale in $x = 0$. Per ogni $a \in (0, 1]$ abbiamo

$$A(a) = \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2(1 - \sqrt{a}).$$

Ancora possiamo immaginare l'area della regione sottesa come limite delle aree $A(a)$ per a che si avvicina a 0

$$A = \lim_{a \to 0^+} A(a) = \lim_{a \to 0^+} 2(1 - \sqrt{a}) = 2.$$

Definizione

Sia $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ *una funzione continua (o localmente integrabile), se esiste finito il limite*

$$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt,$$

la funzione si dice integrabile in $senso\ improprio\ (generalizzato)$ *nell'intervallo* $[a,b]$ *e il limite si chiamerà integrale improprio (generalizzato) di* f *in* $[a,b]$ *e si denoterà con il simbolo*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

In modo analogo possiamo definire l'integrale generalizzato di una funzione $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, quando esiste il limite finito,

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt.$$

Nel caso in cui i limiti coinvolti sono finiti l'integrale improprio si dice convergente, se il limite è infinito si dice invece divergente. Osserviamo che per una funzione continua su tutto l'intervallo $[a,b]$ oppure continua su un intervallo semiaperto e limitata in tale intervallo, l'integrale improprio e l'integrale usuale coincidono.

Se una funzione ha un punto c di infinito interno, $a < c < b$, ed f è definita sia in $[a, c)$ che in $(c, b]$ l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x)dx,$$

è convergente se e solo se lo sono separatamente i due integrali

$$\int_a^c f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx,$$

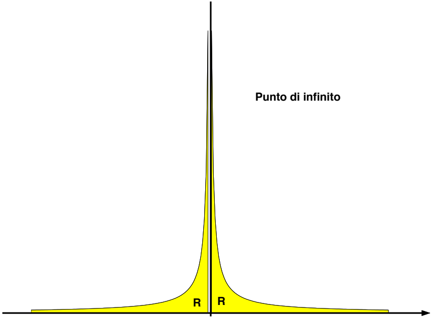

Figura: Esempio di integrale generalizzato con punto di infinito interno.

Esempio (Attenzione ai punti all'infinito)

Occorre fare attenzione alla presenza di asintoti interni, per esempio per l'integrale

$$\int_0^3 \frac{1}{x-2}dx,$$

bisogna verificare l'esistenza dei due integrali impropri su $[0,2]$ e $[2,3]$, un calcolo diretto conduce a un errore. Infatti si valuterebbe la primitiva $\ln|x-2|$ tra 0 e 3 ottenendo il valore $-\ln 2$.

Il calcolo corretto fornisce

$$I_1(a) = \int_0^a \frac{1}{x-2}dx = \ln|a-2| - \ln 2, \quad I_2(a) = \int_a^3 \frac{1}{x-2}dx = -\ln|a-2|.$$

Da cui

$$\lim_{a\to 2^-} I_1(a) = -\infty, \quad \lim_{a\to 2^+} I_2(a) = +\infty,$$

e dunque i due integrali divergono e l'integrale cercato non é calcolabile.

Esempio

Valutiamo

$$\int_0^1 \ln x dx.$$

La funzione integranda ha un asintoto verticale per $x = 0$, abbiamo

$$I(a) = \int_a^1 \ln x dx = x \ln x - x\Big|_a^1 = (-1 - a \ln a - a),$$

dove abbiamo utilizzato l'integrazione per parti. Quindi

$$\lim_{a \to 0^+} I(a) = \lim_{a \to 0^+} (-1 - a \ln a - a) = -1,$$

infatti il limite di $a \ln a$ per $a \to 0^+$ è nullo.

Serie numeriche

Esempio (Paradosso di Zenone)

Il filosofo greco Zenone di Elea mise in crisi la Scienza antica proponendo alcuni difficili paradossi. Uno di questi, detto del "corridore", può essere esplicitato nei termini seguenti. Un corridore non può mai raggiungere la fine di una pista perchè deve sempre percorrere la metà di una qualsiasi distanza prima di poterla percorrere interamente. Avendo percorso la prima metà gli resta ancora davanti a sé la seconda metà, quando questa metà è percorsa resta un quarto, dopo il quarto un ottavo e così via. Dire che il corridore non potrà mai raggiungere la fine della pista equivale a dire che non vi giunge in un tempo finito: la somma di un numero infinito di intervalli temporali positivi non può essere finita.

Cerchiamo di trovare un modello per questa situazione. Supponiamo che il corridore si muova a velocità costante e supponiamo che impieghi un tempo T per coprire la prima metà del percorso. Il successivo quarto richiederà un tempo $T/2$, l'ulteriore tratto di un ottavo un tempo $T/4$. In generale il percorso di un tratto di $1/2^{n+1}$ richiederà un tempo $T/2^n$.

Esempio (Continuazione)

La somma di tutti questi intervalli di tempo é del tipo

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots .$$

Che significato possiamo dare all'espressione appena scritta? Consideriamo la somma (finita)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{T}{2^k},$$

dove n è un numero naturale positivo. Vale

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{(n+1)}}{1-1/2},$$

quindi $S_n = T \cdot \overline{S}_n$. All'aumentare del numero degli addendi i contributi non sono tali da rendere la somma illimitata, anzi nel limite si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2T.$$

Somme parziali e serie

Sia $\{a_k\}$ una successione di valori reali. Associamo a questa successione una nuova successione $\{S_n\}$ costruita come segue

$$
\begin{array}{l}
S_0 = a_0 \\
S_1 = a_0 + a_1 \\
\vdots \\
S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\
\vdots
\end{array}
$$

o in modo ricorsivo

$$S_0 = a_0, \quad S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

L'elemento S_n della successione si chiama *somma parziale* n*-esima* o ridotta n-esima. La successione $\{S_n\}$ si dice *serie* di termini a_n.

Serie convergente e divergente

Definizione

Sia $\{S_n\}$ *la serie di termini* a_n *(cioè costruita a partire dalla successione degli* a_n*), se esiste finito il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

la serie si dirà $convergente$ *con* $somma$ S *e si scriverà*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S.$$

Se il limite

$$\lim_{n \to +\infty} S_n$$

esiste ed è infinito la serie si dice $divergente.$ *Se la serie non è convergente o divergente si dice* $oscillante$ *(o* $indeterminata$*).*

Esempio (Serie geometrica)

Una serie il cui termini formano una successione geometrica

$$a_k = aq^k$$

con a costante è detta serie geometrica. Il numero q è chiamato ragione. Abbiamo già incontrato un esempio in questa forma nella trattazione del paradosso di Zenone, in particolare quando $q = 1/2$, ed $a = T$. Le somme parziali della serie geometrica sono date da

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = a \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Vale la seguente relazione algebrica per ogni $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}.$$

Esempio (Continuazione)

Basta infatti notare che

$$
\begin{array}{r|cccccc|l}
\sum_{k=0}^{n} q^k = & 1 & +q & +q^2 & \cdots & +q^n & & + \\
-q\sum_{k=0}^{n} q^k = & & -q & -q\,q & \cdots & -q\,q^{n-1} & -q\,q^n & = \\
\hline
(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = & 1 & +0 & +0 & \cdots & +0 & -q^{n+1} &
\end{array}
$$

Quindi

$$S_n = a\frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Dalle proprietà delle funzioni esponenziali si ha che, per $|q| < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Per $q \geq 1$ la serie geometrica diverge (nel caso $q = 1$ perchè somma di infiniti termini costanti uguali al valore a), mentre per $q \leq -1$ la serie è indeterminata.

Esempio (Serie armonica)

La serie armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$$

è divergente. Consideriamo la somma parziale S_n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dal punto di vista geometrico S_n si può interpretare come la somma delle aree di rettangoli con base di lunghezza unitaria e altezza di lunghezza $1/k$, dove $k = 1, 2, ..., n$. Per la monotonia della funzione $y = 1/x$ questa somma di aree sarà maggiore dell'integrale di questa funzione nell'intervallo $[1, n+1]$. Abbiamo quindi

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

Esempio (Continuazione)

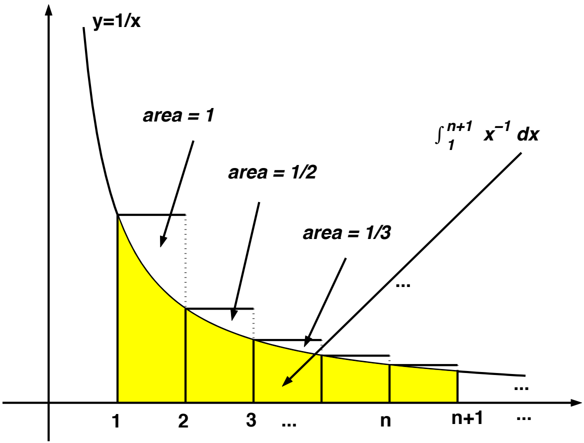

Figura: Significato geometrico della disuguaglianza $1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n \geq \ln(n + 1)$.

Dalla disuguaglianza $S_n \geq \ln(n + 1)$ segue che il limite per $n \to +\infty$ di S_n è uguale a $+\infty$. La serie armonica è quindi una serie divergente.

Serie di potenze

Una serie di potenze è una serie nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n,$$

dove x è una variabile reale, a_n sono i *coefficienti* reali della serie e il coefficiente reale c è il *centro* della serie. Una serie di potenze può convergere per alcuni valori di x (e divergere per altri). Possiamo quindi considerare la funzione f definita con la legge

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n, \quad x \ \text{ tale che la } \ \text{serie sia convergente.}$$

Tutte le serie di potenze convergono per $x = c$, in generale l'insieme dei valori x per cui la serie converge è un intervallo.

Teorema (Raggio di convergenza)

Per una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n,$$

possono presentarsi solo tre possibilità:

(i) *la serie converge solo per* $x = c$*;*

(ii) *la serie converge* $\forall\, x \in \mathbb{R}$*;*

(iii) *esiste un numero positivo* R *tale che la serie converge per* $|x-c| < R$ *e diverge per* $|x-c| > R$*.*

Il numero R *nella* (iii) *si chiama* $\textit{raggio di convergenza}$ *della serie di potenze.*

Nel caso (i) del teorema il raggio di convergenza si dice che è 0, mentre nel caso (ii) si dice che il raggio di convergenza è infinito. Per $R \in \mathbb{R}$, $R \neq 0$, quando $x = c \pm R$ (estremi dell'intervallo) occorre fare una verifica diretta della convergenza o divergenza della serie.

Serie di Taylor

Se una funzione f può essere espressa tramite una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n, \quad |x-c| < R,$$

possiamo cercare di determinare i coefficienti a_n. Per esempio, abbiamo

$$f(c) = a_0.$$

Derivando termine a termine possiamo poi calcolare,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-c)^{n-1},$$

da cui $a_1 = f'(c)$. Derivando ancora una volta si determina $2a_2 = f''(c)$, in generale otteniamo

$$a_n = \frac{f^{n)}(c)}{n!}.$$

Quindi se una funzione f è rappresentabile con una serie di potenze di centro c, coefficienti a_n e raggio di convergenza $R > 0$ allora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,\ x \in (c-R, c+R).$$

La relazione ora scritta si chiama *serie di Taylor* della funzione f centrata in c. Nel caso particolare di centro $c = 0$ si parla di *serie di Mac Laurin*. .
Nel caso di serie di Taylor la somma parziale n-esima della serie è

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

detto polinomio di Taylor della funzione f centrato in c.

Esempio (Serie di Taylor)

Di seguito riportiamo alcune serie di Mac Laurin di funzioni elementari.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1].$$

Esempio (Approssimare)

Le serie di Taylor possono risultare utile per approssimare. Per esempio una approssimazione del numero e si può ottenere come

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Quest'ultima serie ha una convergenza molto rapida e pochi termini forniscono una buona approssimazione, il calcolo di e con la definizione attraverso il limite di $(1 + 1/n)^n$ è invece di una lentezza esasperante. Anche per π sono stati proposti diversi metodi, più o meno rapidi. Per esempio si possono utilizzare funzioni trigonometriche con le relative rappresentazioni in serie di potenze.

Esercizi

Esercizio

Calcolare i seguenti integrali impropri

$$(i)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad (ii)\ \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}};\quad (iii)\ \int_{0}^{+\infty} (x^2-x)e^{-x}dx;$$

$$(iv)\ \int_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx;\quad (v)\ \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx;\quad (vi)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}.$$

Esercizio

Stabilire la convergenza o divergenza dei seguenti integrali impropri

$$(i)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2};\quad (ii)\ \int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^8}};\quad (iii)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{x^2}dx;$$

$$(iv)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx;\quad (v)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2}dx;\ (vi)\ \int_{0}^{18} \frac{x-1}{x^2+\ln x}dx.$$

Esercizio

Determinare la rappresentazione in serie di Taylor (o Mac Laurin) delle seguenti funzioni,

$$(i)\ f(x) = \frac{1}{x+3}, \quad (ii)\ f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$(iii)\ f(x) = \sin^2 x; \quad (iv)\ f(x) = \sqrt{x+1}.$$