Integrali, aree, primitive

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Calcolo integrale: alcuni esempi

Calcolo di una primitiva. Abbiamo visto che il significato fisico della derivata è legato alla velocità di spostamento di un oggetto. Più in generale la derivata fornisce il tasso di variazione istantaneo di qualche fenomeno. Spesso, conoscendo questo tasso, si vogliono dedurre altre informazioni. Per esempio un fisico desidera conoscere la posizione di un oggetto in un certo istante di tempo dalla conoscenza della velocità di spostamento dell'oggetto stesso e della posizione iniziale.
Analogamente un biologo, a cui è noto il tasso di variazione di una certa popolazione di cellule, desidera valutare la popolazione totale di cellule in un certo istante futuro.
In entrambi i casi il problema consiste nel trovare una funzione F la cui derivata è una funzione nota f.

Definizione (Funzione primitiva)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile si dice $primitiva$ di f in I se

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Esempio

(Primitiva) Sia $f(x) = x^2$, non è difficile trovare una primitiva F di f. Dalle regole di derivazione dei polinomi, F deve essere un polinomio di terzo grado, per semplicità supponiamo che sia un monomio $F(x) = kx^3$, k costante, abbiamo $F'(x) = 3kx^2$, dato che $F'(x) = f(x) = x^2 \Rightarrow 3k = 1 \Rightarrow k = 1/3$. Abbiamo quindi che $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ è una primitiva di f. Non è l'unica, qualsiasi funzione G del tipo $G(x) = \frac{x^3}{3} + c$, con c costante, è una primitiva.

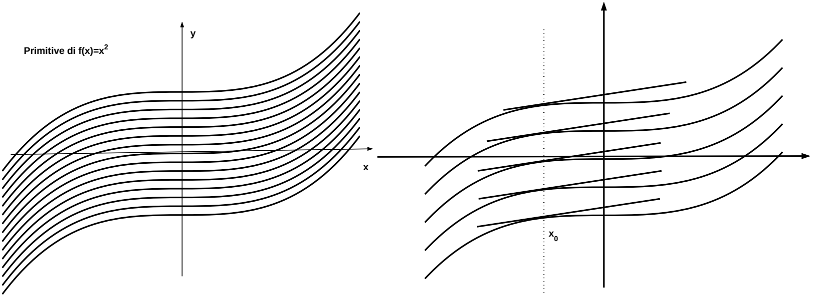


Figura: Alcuni grafici di primitive della funzione $f(x) = x^2$, le rette tangenti in punti con ascissa uguale sono parallele.

Calcolo di aree. Consideriamo un aspetto particolare: sia $y = f(x)$ una funzione continua, $f \geq 0$, $x \in [a, b]$, e vogliamo determinare l'area della regione R che si trova sotto il grafico di f, sopra l'asse delle ascisse e compresa tra le rette $x = a$, $x = b$. Un metodo ragionevole per procedere potrebbe consistere nell'approssimare l'area con l'area di regioni più "semplici" e poi effettuare una operazione di limite.

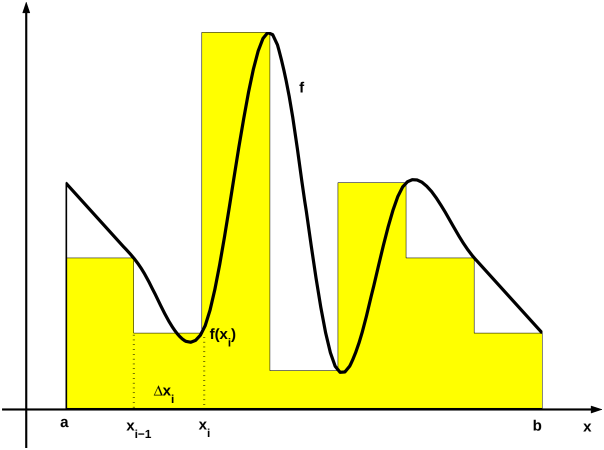


Figura: Approssimazione dell'area della regione sottesa dal grafico della funzione f.

Per esempio dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in N sottointervalli per mezzo della suddivisione

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b.$$

Indichiamo con Δx_i la lunghezza dell'i-esimo sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Sopra ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$ "costruiamo" un rettangolo con base il sottointervallo e altezza di lunghezza $f(x_i)$. L'area di questo rettangolo è $f(x_i) \times \Delta x_i$. La somma di tutte le aree è

$$S_N = f(x_1)\Delta x_1 + ... + f(x_N)\Delta x_N.$$

Possiamo supporre che S_N sia un'approssimazione dell'area della regione R sottesa dal grafico della funzione f.
Al crescere di N, e contemporaneamente con la riduzione $\Delta x_i \to 0$, possiamo definire

$$\text{area}(R) = \lim\ S_N, \quad \text{per} \quad N \to +\infty, \quad \max \Delta x_i \to 0.$$

Osservazione

Possiamo sintetizzare la scrittura

$$S_N = f(x_1)\Delta x_1 + ... + f(x_N)\Delta x_N$$

come

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i.$$

Il simbolo $\sum$ è chiamato simbolo di sommatoria. La somma non dipende esplicitamente da i, che è detto *indice di sommatoria*.
Per le sommatorie valgono le usuali leggi delle somme:

$$\sum_{i=k}^{p}(a_i + b_i) = \sum_{i=k}^{p} a_i + \sum_{i=k}^{p} b_i;$$

$$\sum_{i=k}^{p} ca_i = c\sum_{i=k}^{p} a_i.$$

Vediamo alcune sommatorie importanti:

i)

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n} = n.$$

ii)

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

DIMOSTRAZIONE. La *i*) é ovvia. Possiamo scrivere la sommatoria *ii*) in vari modi, tra cui

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & & + & ... & + & (n-1) & + & n & = & S \\ n & + & n-1 & + & ... & + & 2 & & + & 1 & = & S. \end{array}$$

Sommando membro a membro:

$$\underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1)}_{n} \; = \; 2S$$

da cui la formula

$$n(n+1) = 2S \Rightarrow S = n(n+1)/2.$$

■

Integrale definito

In questo paragrafo intendiamo precisare e generalizzare il procedimento per determinare le aree tramite un processo di limite.
Consideriamo una funzione limitata e definita nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$,

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \exists k \geq 0 \quad \text{tale} \;\; \text{che} \;\; |f(x)| \leq k \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Una *partizione* $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[a, b]$ è un insieme ordinato e finito di punti $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_N\}$, dove

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b.$$

Una partizione $\mathcal{P}$ produce una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in N sottointervalli

$$[a, x_1], \quad [x_1, x_2], \; ..., \quad [x_{N-1}, x_N].$$

Chiameremo intervalli della partizione gli intervalli aperti $(x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, ..., N$, e indicheremo con Δx_i la lunghezza dell'i-esimo intervallo della partizione, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Dato che la funzione f è limitata, gli insiemi $S_i = \{f(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_i)\}$ sono limitati, quindi esistono finiti sia l'estremo inferiore che l'estremo superiore

$$m_i = \inf(S_i) \leq f(x) \leq M_i = \sup(S_i), \quad \forall\, x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Le *somme di Riemann* superiore ed inferiore di f corrispondenti alla partizione $\mathcal{P}$ sono definite dalle relazioni

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i, \quad S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i.$$

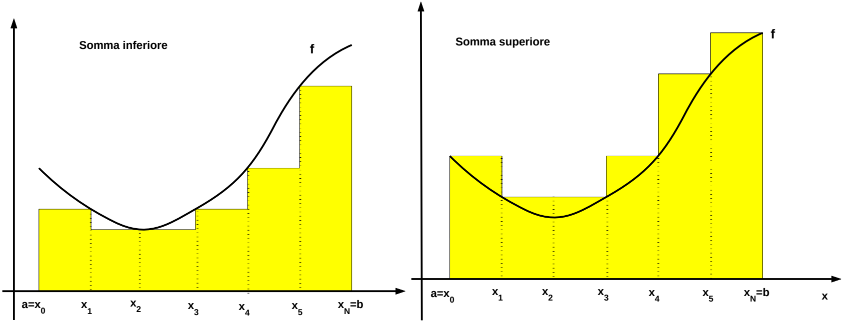


Figura: Un esempio di partizione e di somma di Riemann superiore ed inferiore.

Osserviamo che, posto $m = \inf im(f)$ e $M = \sup im(f)$, risulta

$$m(b-a) \leq s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq M(b-a),$$

quindi esiste l'estremo inferiore e superiore dell'insieme

$$\{s(f,\mathcal{P}), \quad \mathcal{P} \text{ partizione di } \ [a,b]\},$$

e dell'insieme

$$\{S(f,\mathcal{P}), \quad \mathcal{P} \text{ partizione di } \ [a,b]\}.$$

Assegnate due partizioni $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ diremo che $\mathcal{P}_2$ è un *raffinamento* di $\mathcal{P}_1$ (o che $\mathcal{P}_1$ è meno fine di $\mathcal{P}_2$) se $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, cioè se $\mathcal{P}_2$ possiede tutti i punti di $\mathcal{P}_1$, ed eventualmente anche solo un punto in più.
È possibile dimostrare il seguente risultato.

Teorema

Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono due partizioni di $[a,b]$ e $\mathcal{P}_2$ è un raffinamento di $\mathcal{P}_1$ allora, per $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, risulta

$$s(\mathcal{P}_1, f) \leq s(\mathcal{P}_2, f); \quad S(\mathcal{P}_1, f) \geq S(\mathcal{P}_2, f).$$

Abbiamo quindi
$$\sup_{\mathcal{P}} s(f,\mathcal{P}) \leq \inf_{\mathcal{P}} S(f,\mathcal{P}),$$
e possono verificarsi due casi,

- $\sup s < \inf S$, oppure
- $\sup s = \inf S$.

Nel secondo caso la f risulta “integrabile”.

Definizione (Funzione integrabile)

Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitata si dice* integrabile *(secondo Riemann) su* $[a,b]$ *se* $\sup_{\mathcal{P}}(s) = \inf_{\mathcal{P}}(S)$. *Il valore comune di questi due estremi si chiama* integrale *(di Riemann) di* f *in* $[a,b]$ *e sarà denotato con uno dei simboli*

$$\int_{[a,b]} f(x)dx, \quad \int_I f(x)dx, \quad \int_I f,$$

dove $I = [a,b]$ *è il* dominio di integrazione *e* $f = f(x)$ *è la* funzione integranda.

L'insieme delle funzioni integrabili non è vuoto. Infatti su qualunque intervallo $[a,b]$ ogni funzione costante $f(x) = c$ è integrabile e risulta

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} cdx = c(b-a).$$

Esempio

L'insieme delle funzioni integrabili su $[a,b]$ non coincide però con l'insieme delle funzioni limitate su $[a,b]$. Per esempio sia $D : [a,b] \to \mathbb{R}$ la *funzione di Dirichlet*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Per ogni partizione $\mathcal{P}$, risulta

$$s(\mathcal{P}, D) = \sum_{i=0}^{N} 0 \Delta x_i = 0, \quad S(\mathcal{P}, D) = \sum_{i=0}^{N} 1 \Delta x_i = (b-a);$$

infatti c'è sempre qualche razionale e qualche irrazionale in qualsiasi sottointervallo della suddivisione. Quindi $\sup(s) = 0$, $\inf(S) = (b-a)$ e $D \notin \mathcal{R}(a,b)$, mentre D è una funzione limitata.

Osservazione

Nel caso in cui f cambi di segno, ma resti integrabile, le somme di Riemann hanno perfettamente senso. L'integrale può allora essere interpretato come somma algebrica delle aree prese con segno positivo dove $f \geq 0$ e con segno negativo dove $f \leq 0$.

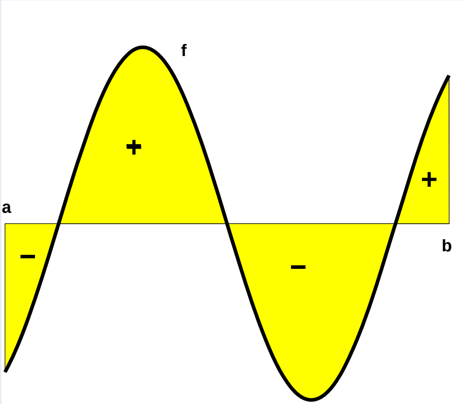


Figura: Integrale $\int_{[a,b]} f(x)dx$ come somma algebrica di aree.

Condizioni di integrabilità

Verificare l'integrabilità di una funzione tramite la definizione è complicato e macchinoso, la nozione di integrabilità resta comunque molto importante.

Teorema (Integrabilità delle funzioni monotone)

sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitata e monotona. Allora* f *è integrabile.*

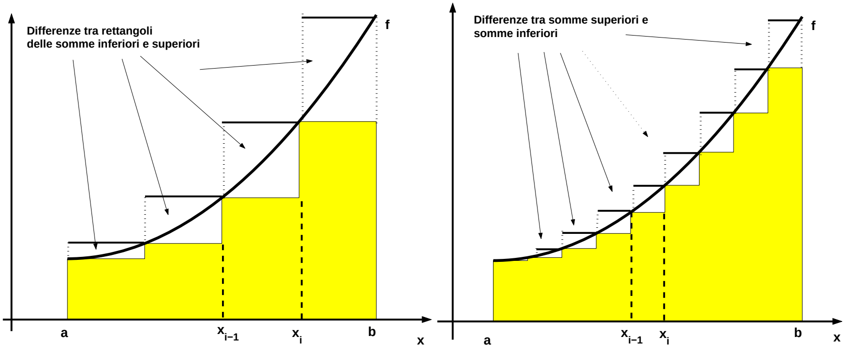


Figura: Integrabilità di una funzione monotona.

Esempio

La funzione $f(x) = x$ risulta integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$; anche $f(x) = x^2$ é integrabile in ogni intervallo $[a, b]$ con $b \leq 0$ oppure $a \geq 0$. La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ risulta integrabile in ogni intervallo $[a, b]$ con $a \geq 0$.

Teorema (Integrabilità delle funzioni continue)

Se f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora f è integrabile su $[a, b]$.

Esempio

Tutte le funzioni polinomiali sono integrabili in ogni intervallo $[a, b]$, così come le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$, le funzioni esponenziali a^x e le funzioni logaritmiche $\log x$ (in intervalli $[a, b]$, con $a > 0$).

Osservazione

(Integrazione numerica) Per una valutazione numerica approssimata dell'integrale

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

con f funzione continua, possiamo sostituire al posto del valore vero I una somma che lo approssimi

$$Q = \sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k).$$

Formule di questo tipo si dicono *formule di quadratura numerica*, dove $x_k \in [a, b]$ sono i ***nodi*** della formula di quadratura e w_k opportuni ***pesi***. Per esempio la formula di quadratura composta del *punto medio*

$$Q_M = \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) \cdot f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right).$$

Osservazione

Oppure la formula di quadratura dei *trapezi*

$$Q_T = \sum_{k=1}^{m} \frac{(x_k - x_{k-1})}{2} \cdot (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \, .$$

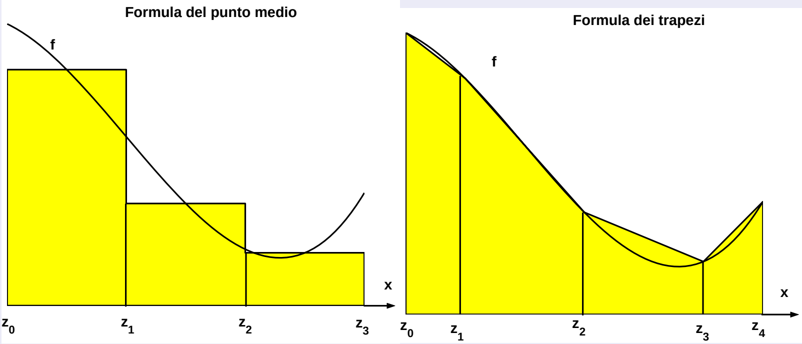


Figura: Formule di quadratura per il calcolo numerico dell'integrale definito.

Proprietà dell'integrale

Possiamo estendere la nozione di integrale considerando integrali tra b e a ($b > a$). L'insieme di funzioni con cui lavoreremo è l'insieme delle *funzioni localmente integrabili*. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, f è localmente integrabile quando essa è integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato incluso in I.

Definizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f localmente integrabile, $a, b \in I$. L'integrale da a a b di f è il numero reale definito come segue

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f(x)dx & \text{se} \quad a < b \\ 0 & \text{se} \quad a = b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f(x)dx & \text{se} \quad a > b \end{cases}$$

I due numeri a e b vengono detti primo e, rispettivamente, secondo estremo di integrazione.

Teorema (Proprietà degli integrali)

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, I *intervallo,* f, g *localmente integrabili,* $a, b, c \in I$, $A, B \in \mathbb{R}$ *costanti, allora*

i) *la funzione* $Af + Bg$ *è integrabile e*

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]dx = A \int_a^b f(x)dx + B \int_a^b g(x)dx;$$

ii) *se* $f \geq 0$ *e* $a < b$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$*;*

iii) *se* $f(x) \geq g(x)$, $a < b$ *allora* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$*;*

iv) *se* $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, $\quad b > a$ *allora*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$$

v) *se* $a \leq b$ *allora* $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$*;*

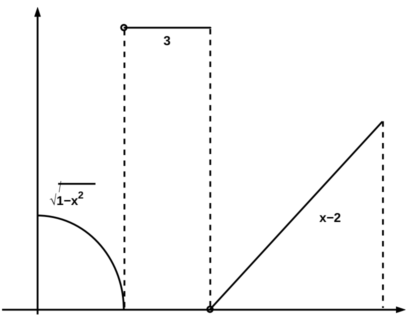
vi) $\forall\ a,\ b,\ c \in I$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Esempio

(Funzioni continue a tratti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se} \quad x \in [0,1] \\ 3 & \text{se} \quad x \in (1,2] \\ x-2 & \text{se} \quad x \in (2,4] \end{cases}$$

essa risulta essere una funzione continua a tratti.



Esempio

Geometricamente, l'integrale tra 0 ed 1 della funzione $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ rappresenta l'area di un quarto di cerchio con centro l'origine e raggio 1.
L'integrale tra 1 e 2 della funzione costante $f_2(x) = 3$ rappresenta l'area del rettangolo di base $[1, 2]$ e altezza 3.
Infine l'integrale della funzione $f_3(x) = x - 2,\ x \in [2, 4]$, è uguale all'area del triangolo rettangolo con cateti di lunghezza 2.
Riassumendo, f è integrabile e

$$\int_{[0,4]} f(x)dx = \int_{[0,1]} \sqrt{1-x^2}dx + \int_{[1,2]} 3dx + \int_{[2,4]} (x-2)dx =$$

$$= \pi/4 + 3 + \frac{1}{2}4 = \frac{\pi}{4} + 5.$$

Definizione (Valor medio integrale)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, si chiama $valor\ medio$ di f nell'intervallo $[a,b]$ la quantità

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Dalla proprietà $iv)$ degli integrali si deduce che

$$\inf(\{f(x) : \ x \in [a,b]\}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \sup(\{f(x) : \ x \in [a,b]\}).$$

Se f è anche continua, assume tutti i valori tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore della sua immagine (Teorema dei valori intermedi) quindi esisterà un punto $c \in [a,b]$ tale che $f(c)$ è uguale al valor medio.

Teorema (Teorema valor medio integrale)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, posto $m = \inf_{[a,b]} f, \quad M = \sup_{[a,b]} f$ si ha

i) $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$;

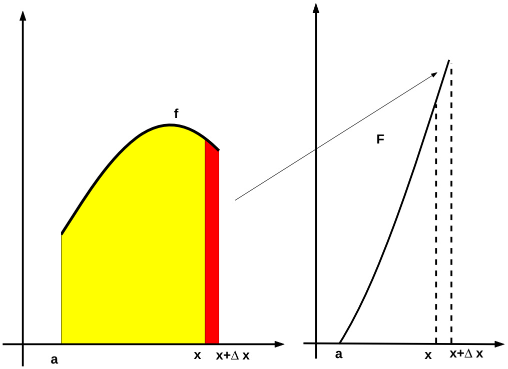
ii) *se f è continua su $[a,b]$ esiste $c \in [a,b]$ tale che $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$.*

Relazioni tra integrazione e derivazione

Al momento abbiamo pochi strumenti per il calcolo di integrali. Sia f una funzione localmente integrabile su I, sia $a \in I$, definiamo la *funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in I.$$

Dal punto di vista delle aree equivale alla variazione dell'area al variare del secondo estremo di integrazione.



Dimostriamo che $F(x)$ é una funzione continua. Per $x, y \in I$, con $x < y$

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt,$$

quindi

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|dt,$$

e se $M \geq |f(t)| \quad \forall t \in I$ segue che

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x|.$$

Dall'ultima disuguaglianza si deduce che se $y \to x$ anche $F(y) \to F(x)$, e quindi la continuitá di F. Abbiamo il seguente importante risultato che lega integrabilitá e derivabilitá

Teorema (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Sia f una funzione localmente integrabile in un intervallo I e $a \in I$, sia F la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in I.$$

Sia inoltre x_0 un punto interno a I, se f è continua in x_0 allora esiste $F'(x_0)$ e si ha $F'(x_0) = f(x_0)$.

Un corollario estremamente importante è il seguente.

Teorema

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua e sia G una funzione derivabile in I tale che $G'(x) = f(x)$, allora $\forall\, a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

DIMOSTRAZIONE. Posto $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha $F'(x) = f(x)$. Quindi, essendo $G'(x) = f(x)$, risulta $(F - G)(x) = k$ costante. Ne segue che

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) + k.$$

Per $x = a$,

$$F(a) = 0 \Rightarrow G(a) + k = 0 \Rightarrow G(a) = -k.$$

Per $x = b$ si ottiene

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) + k = G(b) - G(a).$$

■

Esempio

Un metodo per calcolare

$$\int_a^b f(x)dx$$

consiste dunque nel trovare una primitiva $F(x)$ di f.
Per esempio, per $F(x) = x^3/3$, $F'(x) = x^2$ quindi

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}.$$

Per esempio,

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1,$$

infatti $\sin'(x) = \cos(x)$. Ancora

$$\int_2^{10} \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_2^{10} = \ln(10) - \ln(2) = \ln 5.$$

Integrali indefiniti e primitive

Definizione (Integrale indefinito)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua in I. L'insieme delle primitive di f si chiama integrale indefinito *di f e si denota con il simbolo*

$$\int f(x)dx$$

Osservazione

Occorre far attenzione, $\int_a^b f(x)dx$ indica un numero, mentre $\int f(x)dx$ indica un insieme di funzioni. Non tutte le primitive sono esprimibili tramite funzioni elementari. Per esempio per $f(x) = e^{-x^2}$ non si trova una primitiva in tal senso, quindi per il calcolo della funzione integrale

$$\int_0^x e^{-t^2} dt,$$

occorre ricorrere a tecniche numeriche.

f(t)	$\int f(t)dt$
1	$x + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
x^p, $p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\sin ax$	$-\frac{\cos ax}{a} + C$
$\cos ax$	$\frac{\sin ax}{a} + C$
$1/x$	$\ln x + C$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x} + C$
$1/(a^2 + x^2)$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + C$

Tabella: Alcune primitive, C costante reale.

Regole di integrazione

In corrispondenza alle regole di derivazione abbiamo le regole per il calcolo di integrali.

Esempio

(Integrazione per scomposizione) Possiamo cercare di scomporre la funzione integranda come combinazione lineare di più funzioni integrabili. Per esempio si consideri

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}.$$

Dal fatto che $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ si ottiene

$$\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x},$$

quindi

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \tan x - \text{cotan} x + C.$$

Integrazione per sostituzione

Sia $u = g(x)$ una funzione derivabile con derivata prima continua con immagine contenuta nell'intervallo I, sia f continua in I, allora

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

La regola è basata sulla regola di derivazione di una funzione composta. Dal punto di vista del calcolo facilita scrivere la sostituzione nel seguente modo. Posto $u = g(x)$, avvalendosi della forma $du/dx = g'(x)$ si scrive $du = g'(x)dx$, quindi se $F' = f$, si ha

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = \int F'(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Per esempio, vogliamo valutare

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx.$$

Si pone $u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2xdx$, quindi $xdx = du/2$, da cui

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

Esempio

(Integrali trigonometrici) Per esempio consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Se si pone $u = \cos x$, formalmente $du = -\sin x dx$ e

$$\int \tan x dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Per esempio per

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x(1 - \sin^2 x) \cos x dx,$$

posto $u = \sin x$, $du = \cos x dx$, si ha

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx \quad = \int u^4(1-u^2)du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7} + C.$$

Esempio

(Occhio agli estremi) Calcoliamo

$$\int_0^5 \sqrt{4x+1}dx.$$

Con la sostituzione $u = 4x + 1$ si ottiene $du = 4dx$. Per $x = 0 \Rightarrow u = 1; \quad x = 5 \Rightarrow u = 21$, gli estremi di integrazione vanno cambiati.

$$\begin{aligned}\int_0^5 \sqrt{4x+1}dx \quad &= \tfrac{1}{4}\int_1^{21} \sqrt{u}du = \tfrac{1}{4}\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^{21} \\ &= \tfrac{1}{6}[21^{3/2} - 1^{3/2}].\end{aligned}$$

Esempio

(Funzioni pari e funzioni dispari) Supponiamo che

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$$

sia continua nel dominio;

i) se f è pari $(f(x) = f(-x))$, allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

ii) se f è dispari $(f(x) = -f(-x))$, allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Per esempio l'integrale da $-\pi$ a π di $\sin x$ è nullo.

Integrazione per parti

La regola di derivazione del prodotto di due funzioni ci dice che

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Nella notazione degli integrali indefiniti

$$\int (f'g + fg')\, dx = f(x)g(x) + C,$$

e dalla linearità dell'integrazione si ha

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x),$$

da cui la regola di integrazione per parti per integrali indefiniti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Per integrali definiti la regola di integrazione per parti diventa

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Esempio

Calcoliamo alcuni integrali indefiniti tramite la regola di integrazione per parti. Consideriamo

$$\int x \sin x dx.$$

Scegliendo $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ si ottiene $f(x) = -\cos x$ e

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) \cdot 1 dx = -x \cos x + \int \cos x dx.$$

Dalle regole di integrazione elementari

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Osserviamo che la scelta $f'(x) = x, \quad g(x) = \sin x$ non avrebbe portato semplificazioni perché l'integrale di un polinomio ne aumenta il grado, mentre con la scelta fatta x "sparisce".

Esempio

Valutiamo

$$\int \ln x dx,$$

dove sembra esserci una sola funzione. In realtà possiamo scegliere

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = \ln x \Rightarrow f(x) = x, \quad g'(x) = \frac{1}{x},$$

e quindi

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Proviamo ora con

$$\int e^x \sin x dx$$

e la scelta $f'(x) = \sin x, \quad g(x) = e^x$. Si ottiene

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx,$$

e l'integrale da calcolare appare della stessa difficoltà di quello di partenza.

Esempio

(Continuazione) Insistiamo con la scelta $f'(x) = \cos x, \quad g(x) = e^x$, quindi

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

e ora sembra che siamo tornati al punto di partenza. Ma se sostituiamo l'ultimo integrale nella prima formula per parti si ottiene

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x + \sin x) - \int e^x \sin x dx,$$

che possiamo vedere come una equazione nell'integrale da calcolare,

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Esempio

Calcoliamo

$$\int_0^1 \arctan x dx.$$

Posto $f'(x) = 1$ e $g(x) = \arctan x$ si ottiene

$$\int_0^1 \arctan x dx = x \arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Dalla derivata della funzione composta $d \ln |f(x)| = f'(x)/f(x)$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |1+x^2|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1).$$

Quindi

$$\int_0^1 \arctan x dx = \arctan(1) - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Esercizi

Esercizio

Calcolare attraverso la definizione l'area di un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza 1 *e* 2 *e l'area di un trapezio isoscele con basi di lunghezza* 1 *e* 3.

Esercizio

Calcolare le primitive delle seguenti funzioni (da considerare definite in opportuni intervalli) utilizzando le primitive note di funzioni elementari,

$$f_1(x) = \sin x \ \cos x, \quad f_2(x) = (3x+1)^4,$$

$$f_3(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \qquad f_4(x) = \frac{x^2}{1+x^6},$$

$$f_5(x) = \frac{1+\cos x}{x+\sin x}, \quad f_6(x) = \frac{1}{x^2(1+x^2)},$$

Esercizio

Sia f *una funzione continua e* g *e* h *due funzioni derivabili, trovare la formula della derivata per la funzione*

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt.$$

Applicare la formula trovata alla funzione

$$F_1(x) = \int_0^{x^3} \cos t dt,$$

e verificare con un calcolo diretto dell'integrale definito.

Esercizio

Disegnare il grafico della funzione f *e della funzione*

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

quando

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 4x & x \in [0,1] \\ 3 - x & x \in (1,3] \\ 0 & x > 3 \end{cases}.$$

Esercizio

Determinare e disegnare il grafico della funzione g

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt, \; x \in [-2, 1]$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-2, -1] \\ (t+1)^2 - 1 & t \in (-1, 0) \\ e^{-t/2} & t \in [0, 1] \end{cases} .$$

Esercizio

Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali,

$$(i) \quad \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2} dx, \qquad (ii) \quad \int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} dx,$$

$$(iii) \quad \int \frac{2+x}{x^3(x-1)} dx, \quad (iv) \quad \int \frac{1}{x^3-1} dx.$$

Esercizio

Calcolare i seguenti integrali (per sostituzione)

$$(i)\quad \int_1^{e/2} \frac{1}{x\sqrt{(1-\ln^2 x)}}dx, \quad (ii)\quad \int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}, \quad (iii)\quad \int_0^4 x^5 e^{x^4}\, dx.$$

Esercizio

Calcolare i seguenti integrali (per parti)

$$(i)\quad \int_2^e x^5 \ln x dx, \quad (ii)\quad \int_0^{\pi/2} x\sin^2 x, \quad (iii)\quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$