Funzioni elementari

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Funzioni polinomiali e radicali

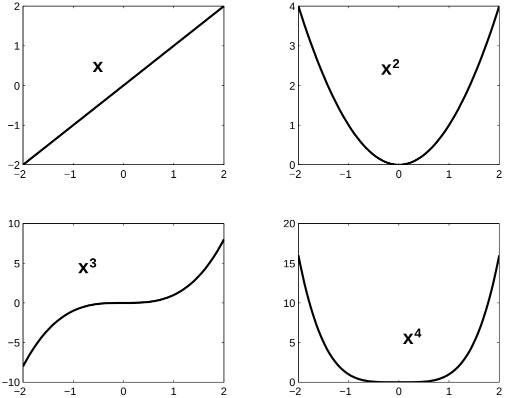
Una funzione polinomiale (o polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$) ha la forma

$$p_n(x) \; = \; a_0 \; + \; a_1 x \; + \; \ldots \; + \; a_n x^n,$$

con $x \in \mathbb{R}$. I coefficienti a_k, $k = 0, \ldots, n$ sono numeri reali assegnati. Se $a_k = 0$ per ogni k si ha la funzione identicamente nulla. Tra tutte le funzioni reali di variabile reale l'insieme $\mathbb{P}$ dei polinomi può essere individuato dalle seguenti proprietà:

1. Le funzioni costanti $x \mapsto c$ dove $c \in \mathbb{R}$ è assegnato, appartengono a $\mathbb{P}$;
2. La funzione identità, $x \mapsto x$, appartiene a $\mathbb{P}$;
3. Se p_1 e p_2 appartengono a $\mathbb{P}$, vi appartengono anche $p_1 + p_2, \; p_1 p_2$;
4. La classe $\mathbb{P}$ contiene soltanto le funzioni che si possono costruire in base alle precedenti regole 1, 2 e 3.

Due polinomi sono uguali se hanno lo stesso grado e hanno ordinatamente uguali i coefficienti. Ogni singolo addendo $a_k x^k$ si dice monomio di grado k.



Dati due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ una funzione del tipo $f(x) = p(x)/q(x)$ è definita sull'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \ q(x) \neq 0\}$. Le funzioni costruite in questo modo vengono chiamate *funzioni razionali*.

Esempio

(Polinomi e funzioni razionali) Per esempio $p(x) = x^3 - 2x + 1$ è un polinomio di grado 3. Mentre $q(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^2$ è un polinomio di grado 5. La funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4},$$

è una funzione razionale. Sarà definita solo su $A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. ∎

Esempio

(Funzioni quadratiche) Le funzioni polinomiali di secondo grado si scrivono nella forma

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad a_2 \neq 0.$$

Il grafico di una funzione quadratica è una parabola, le sue intersezioni con l'asse delle x sono date da

$$y_{\pm} = \frac{1}{2a_2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}).$$

∎

Esempio

(Potenze con esponente frazionario) Per n numero naturale non nullo e per $x \geq 0$ definiamo

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x},$$

come il valore $y \geq 0$ tale che $y^n = x$.
Se n è un intero positivo pari la funzione x^n non è iniettiva su tutta la retta reale mentre lo è la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$, la sua inversa è la funzione

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}, \qquad x \in [0, +\infty).$$

Se n è dispari, la funzione x^n è iniettiva e la sua inversa è la funzione

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \text{se} \quad x \in [0, +\infty) \\ -\sqrt[n]{-x} & \text{se} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Occorre fare attenzione, di solito è meglio distinguere, come funzioni, tra la funzione $x^{\frac{1}{n}}$ e la funzione inversa di x^n.

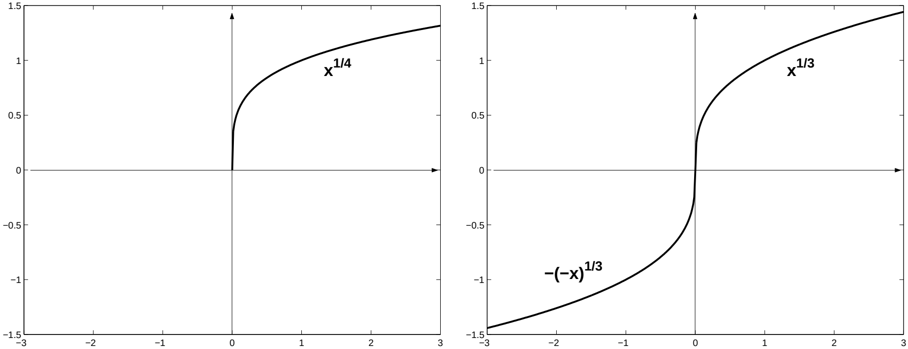


Figura: Grafico dell'inversa di x^4 e di x^3.

Esempio

In modo analogo per n intero positivo e $x \neq 0$ possiamo definire

$$x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

Se p e q sono interi positivi (ridotti ai minimi termini) poniamo

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} \; = \; \sqrt[q]{x^p}$$

mentre se ci limitiamo a $x \neq 0$, possiamo definire

$$x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}.$$

Per m e n interi vale la *regola degli esponenti*

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n},$$

che si può facilmente estendere al caso di esponenti razionali,

$$x^{\frac{p}{q}} \cdot x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

Funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche

Ora consideriamo le funzioni

$$x \mapsto a^x,$$

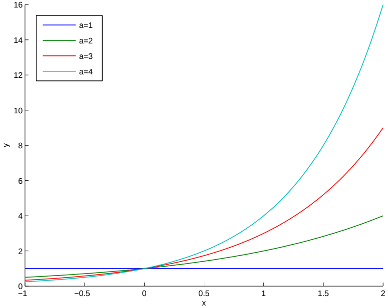
con a reale positivo fissato (detto *base*), e facendo variare l'esponente x. La costruzione di queste funzioni, dette *funzioni esponenziali*, viene fatta definendo la funzione dapprima sui numeri interi, estendendo poi ai razionali e infine a tutto il campo reale.
Ricordiamo che per $n \in \mathbb{Z}$ e $a > 0$ una funzione esponenziale è definita come

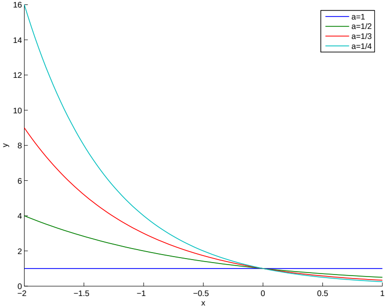
$$a^0 = 1, \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \ \text{ fattori}} \quad \text{se} \quad n = 1, 2 \dots$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \quad \text{se} \quad n = -1, -2, -3, \dots$$

Come definire a^x con x generico e $a > 0$ fissato?
Se $x \in \mathbb{Q}$ sappiamo come fare, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ possiamo pensare di approssimarlo sempre meglio con numeri razionali per ottenere un corrispondente valore approssimato di a^x.
Le funzioni esponenziali soddisfano le seguenti proprietà per $a,\, b > 0$ e $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$
\begin{array}{llll}
i) & a^0 = 1, & iv) & a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}, \\
ii) & a^{x+y} = a^x \cdot a^y, & v) & (a^x)^y = a^{xy}, \\
iii) & a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, & vi) & (ab)^x = a^x \cdot b^x.
\end{array}
$$





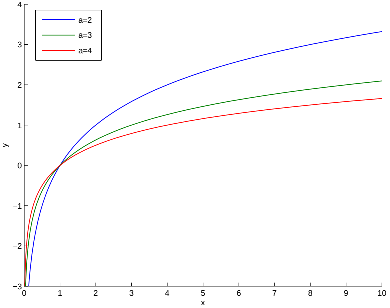
Logaritmo come inversa

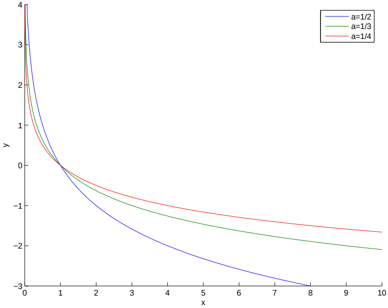
Nel caso in cui $a = 1$, allora $a^x = 1^x = 1$ per ogni x, si ritrova una funzione costante. Nel caso in cui $a > 1$ se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$. Al contrario se $0 < a < 1$ se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$. Una funzione che ha tale comportamento è detta rispettivamente *funzione crescente* e *funzione decrescente*. Per $a > 0$ e $a \neq 1$ le funzioni esponenziali a^x, $x \in \mathbb{R}$, sono funzioni iniettive. Infatti una qualunque retta parallela all'asse delle ascisse ne interseca il grafico in un solo punto. Una funzione esponenziale, per $a \neq 1$, è dunque invertibile. La funzione inversa è detta logaritmo di base a ed è indicata con $\log_a$. Pertanto,

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$$

Spesso scriveremo semplicemente $\log_a x$, omettendo le parentesi, ogniqualvolta la cosa non sia possibile fonte di equivoci.

Utilizzando le proprietà di simmetria del grafico della funzione inversa rispetto al grafico della funzione otteniamo i grafici di alcune funzioni logaritmiche.





Ribadiamo che *dom*$(\log_a) = (0, +\infty)$, pertanto

$$\log_a(a^x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}; \qquad a^{\log_a x} = x \quad \forall\, x \in (0, +\infty).$$

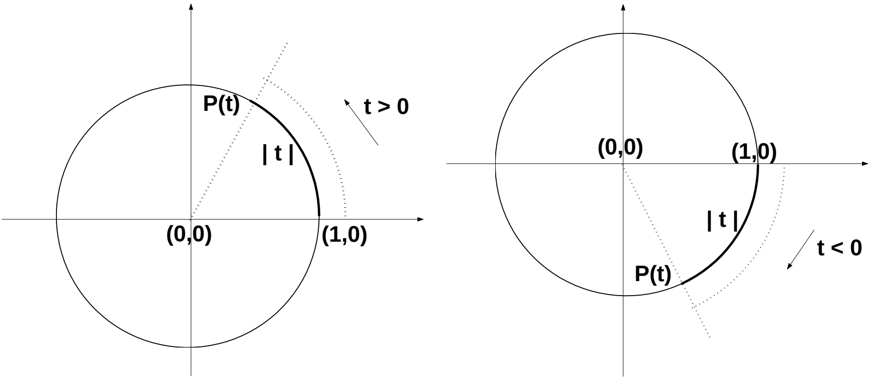
In corrispondenza con le leggi degli esponenziali si hanno le seguenti proprietà dei logaritmi,

$$\begin{array}{llll} i) & \log_a(1) = 0, & iv) & \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \\ ii) & \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), & v) & \log_a(x^y) = y\log_a(x), \\ iii) & \log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x), & vi) & \log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}. \end{array}$$

Come esercizio dimostriamo la proprietà del "logaritmo del prodotto". Sia $u = \log_a x, \quad v = \log_a y$, allora $a^u = x$, $a^v = y$. Quindi $xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ e dunque $\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$.

Funzioni circolari (trigonometriche)

Dato un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio 1 è l'insieme dei punti $P(x, y)$ del piano per cui $x^2 + y^2 = 1$. Chiameremo C circonferenza goniometrica. Immaginiamo che il punto P si trovi nella posizione $(1, 0)$ e inizi a ruotare su C descrivendo la parte di circonferenza contenuta nel primo quadrante ($x,\ y \geq 0$).
Se P descrive un arco di lunghezza $t > 0$ indichiamo con $P(t)$ il punto di arrivo.
Se P si muove in senso orario possiamo comunque associare ancora il punto $P(t)$ al valore $t < 0$ se percorro un arco di lunghezza $|t|$, in senso opposto al precedente.



Per t variabile da 0 a 2π (con π, *pi greca*, si indica la lunghezza della semicirconferenza di raggio unitario) il punto $P(t)$ percorre l'intera circonferenza goniometrica. Si definiscono allora il *coseno* e il *seno* di t mediante

$\cos(t)$ è l'ascissa di $P(t)$ (*coseno)*

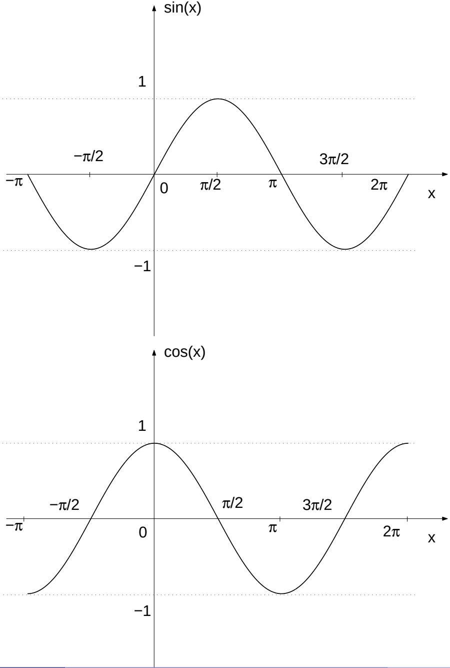
$\sin(t)$ è l'ordinata di $P(t)$ (*seno).*

Osservazione

Stiamo misurando gli angoli in radianti e non in gradi. Un angolo positivo individuato da una coppia ordinata di semirette (r, r') uscenti dal punto O misura t radianti quando

$$t = \frac{\text{arco di C}}{\text{raggio di } C} = \frac{\widehat{AP}}{R}$$

dove C è una circonferenza di raggio R e $\widehat{AP}$ l'arco di circonferenza determinato dall'angolo. Nel caso della circonferenza unitaria il raggio vale 1. Da quanto detto risulta che, per esempio, ad angoli, in gradi, di $30°,\ 45°,\ 60°,\ 180°$ corrispondono in radianti misure rispettivamente di $\pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3,\ \pi$. ■


sin(x)
1
−π/2
3π/2
−π
0
π/2
π
2π
x
−1
cos(x)
1
−π/2
π/2
3π/2
−π
0
π
2π
x
−1

Riportiamo nella Tabella alcuni valori delle funzioni seno e coseno, dette anche funzioni circolari o funzioni trigonometriche elementari.

Radianti	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
Seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1

Si possono derivare varie proprietà delle funzioni circolari. Entrambe si ripetono e gli stessi valori si ripresentano dopo un certo T. In particolare, dopo aver compiuto un giro di circonferenza, ossia per $T = 2\pi$ abbiamo

$$\sin(t) = \sin(t + 2\pi); \quad \cos(t) = \cos(t + 2\pi).$$

Le due funzioni sono funzioni periodiche. Cioè esiste un numero reale positivo $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x,\ x + T \in \mathit{dom}(f)$. Si noti il valore di T non è necessariamente unico, per esempio si ripresentano gli stessi valori anche dopo due, tre o più giri completi di circonferenza. Il valore positivo minimo per cui questo accade, è detto *periodo* della funzione. Nel caso delle funzioni seno e coseno il periodo è quindi $T = 2\pi$.

Il grafico della funzione seno è simmetrico rispetto all'origine

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad \sin(t) = -\sin(-t).$$

Un funzione con questa proprietà si dice *funzione dispari*. Quindi una funzione è dispari se, $\forall\, x,\ -x \in \textit{dom}(f)$ si ha $f(x) = -f(-x)$.
Il grafico della funzione coseno è invece simmetrico rispetto all'asse delle ordinate,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad \cos(t) = \cos(-t).$$

Funzioni con simmetria uguale a quella della funzione coseno si dicono *funzioni pari*. Quindi una funzione è pari se, $\forall\, x,\ -x \in \textit{dom}(f)$ si ha $f(x) = f(-x)$, al solito anche $-x$ deve stare nel dominio di f.

Proprietá

Utilizzando le proprietà geometriche delle funzioni trigonometriche elementari si possono dedurre varie proprietà, tra cui

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1; \qquad \text{(Teorema di Pitagora)}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t) \\ \sin(s+t) &= \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t) \end{aligned}\right. \qquad \text{(formule di addizione)}$$

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}; \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}; \qquad \text{(formule di bisezione)}$$

$$\cos(t \pm \pi) = \mp \cos(t); \quad \sin(t \pm \pi) = \mp \sin(t); \qquad \text{(angoli supplementari)}$$

$$\cos(t \pm \pi/2) = \mp \sin(t); \quad \sin(t \pm \pi/2) = \pm \cos(t). \qquad \text{(angoli complementari)}$$

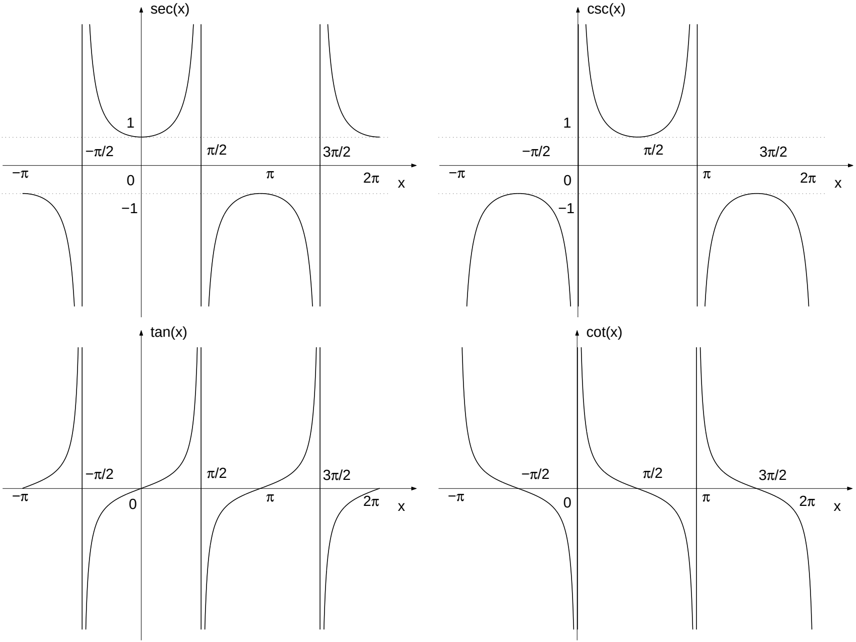
Ulteriori funzioni trigonometriche

Altre funzioni trigonometriche sono

$$\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}, \quad \textit{(secante)} \qquad \csc(t) = \frac{1}{\sin(t)}, \quad \textit{(cosecante)}$$

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}, \quad \textit{(tangente)} \qquad \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}, \quad \textit{(cotangente)}$$

ognuna definita dove i denominatori non si annullano.
Dal punto di vista geometrico, la funzione tangente misura la lunghezza algebrica del segmento individuato dal punto $A(1,0)$ e dal punto che risulta come intersezione tra la retta tangente alla circonferenza goniometrica in A e la retta che congiunge l'origine O al punto P in movimento sulla circonferenza.


sec(x)
1
−π/2
π/2
3π/2
−π
0
π
2π
x
−1
csc(x)
1
−π/2
π/2
3π/2
−π
0
π
2π
x
−1
tan(x)
−π/2
π/2
3π/2
−π
0
π
2π
x
cot(x)
−π/2
π/2
3π/2
−π
0
π
2π
x

Funzioni trigonometriche inverse

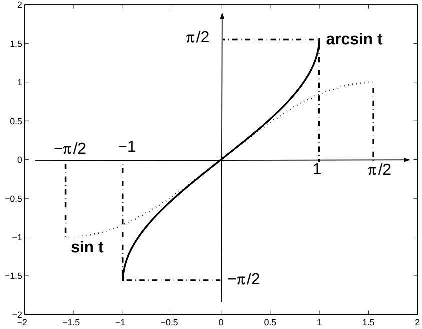
Le funzioni trigonometriche, in quanto periodiche, non sono iniettive. Tuttavia sono strettamente crescenti o decrescenti su opportuni intervalli, le restrizioni su tali intervalli sono iniettive e quindi invertibili. Per ciascuna funzione si sceglie una cosiddetta *regione fondamentale*, cioè un insieme su cui la restrizione della funzione risulti iniettiva. In ogni regione fondamentale si considera la restrizione della funzione trigonometrica e quindi la funzione inversa di quest'ultima.

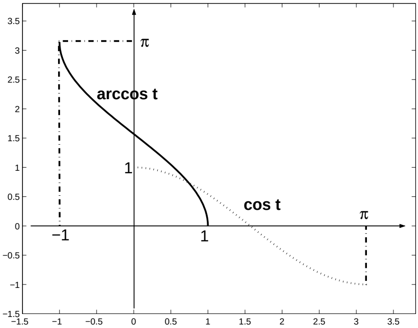
Funzione trigonometrica	**Regione fondamentale**	**Funzione inversa**
$\sin(t)$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\arcsin(t)$
$\cos(t)$	$[0, \pi]$	$\arccos(t)$
$\tan(t)$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\arctan(t)$

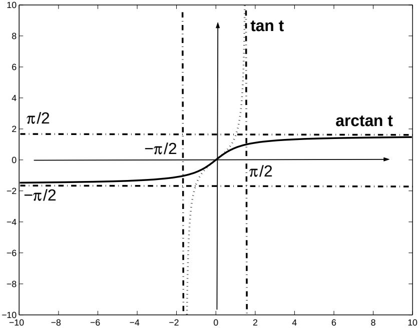
Valgono inoltre le seguenti identità,

$$\arcsin(\sin(t)) = t \quad \forall\, t \in [-\pi/2, \pi/2]; \quad \sin(\arcsin(t)) = t \quad \forall\, t \in [-1, 1],$$

e analoghe identità per gli altri casi.


arcsin t
π/2
−π/2
−1
1
π/2
sin t
−π/2


π
arccos t
1
cos t
π
−1
1


tan t
π/2
arctan t
−π/2
π/2
−π/2

Esercizi

Esercizio

Tracciare il grafico e scrivere le equazioni delle rette passanti per i punti P e Q dati da

$$P = (1,0), Q = (0,1), \quad P = (2,4), Q = (-1,2), \quad P = (-1,0), Q = (1,1).$$

Esercizio

Determinare i punti di intersezione con l'asse delle x delle seguenti parabole e tracciarne un grafco qualitativo.

$$y = x^2 - 10x + 21, \quad y = 15x^2 - x - 2, \quad y = x^2 + 2x + 1.$$

Esercizio

Dati i polinomi $p = x^2 - 2x + 1$ e $q = 1 - x^3$ calcolare $p + q$, $p - q$, pq e p/q.

Esercizio

Dimostrare le seguenti proposizioni:

(a) *se la funzione f ha periodo T allora la funzione $f(ax+b)$, con $a>0$, ha periodo T/a.*

(b) *Se la funzione f è pari ($\forall\, x \in \textit{dom}(f),\ -x \in \textit{dom}(f)\ \ f(x) = f(-x)$) e la funzione g è dispari ($\forall\, x \in \textit{dom}(f),\ -x \in \textit{dom}(f)\ \ f(x) = -f(-x)$), allora la funzione fg è dispari.*

(c) *Se f è una funzione dispari e $0 \in \textit{dom}(f)$ allora $f(0) = 0$.*