Funzioni

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Il concetto di funzione

Nella prima parte del corso ci occuperemo prevalentemente di un solo "oggetto matematico", le funzioni del tipo

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

con A sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.
Nella scrittura sopra abbiamo grandezze che siamo liberi di scegliere arbitrariamente nell'insieme A, tali grandezze si dicono *variabili*, e abbiamo grandezze in $\mathbb{R}$ che sono associate alle variabili o *funzione delle variabili* di A.
Per esempio:

- Quando comperiamo del pane sappiamo che il costo finale dipenderà dalla quantità e dal tipo di pane scelto.
- Oppure, il codice fiscale associato a una certa persona è univocamente determinato da una opportuna legge.
- Ancora, la *legge di Boyle* per un gas contenuto in un recipiente a temperatura costante è data da $pv = C$, dove p è la pressione del gas, v il volume occupato e C una opportuna costante. Si ottiene quindi $p = C/v$, ossia la pressione varia in modo inversamente proporzionale rispetto al volume.

Definizione (Funzione)

Siano A e B due insiemi non vuoti, una funzione f definita in A a valori in B è una legge di natura qualunque che a ogni elemento x di A fa corrispondere uno e un solo elemento $y = f(x)$ di B.

Formalmente, per esprimere che f è una funzione definita in A a valori in B utilizzeremo uno dei due simboli

$$f : A \to B \quad o \quad A \xrightarrow{f} B.$$

L'insieme A si chiama *dominio* di f, si indicherà con *dom*(f) e si chiamerà anche *insieme di definizione*. L'insieme B in cui la funzione prende i propri valori si chiama un *codominio* della funzione. L'insieme di tutti i possibili valori $f(x)$, cioè il sottoinsieme di B di elementi che sono associati ad almeno un elemento del dominio, viene chiamato *immagine* di f. L'immagine di una funzione f sarà indicata come *im*(f) oppure $f(A)$ dove A è il dominio. In termini di insiemi, per $f : A \to B$,

$$\mathit{im}(f) = \{y \in B : \ y = f(x), \ x \in A\}.$$

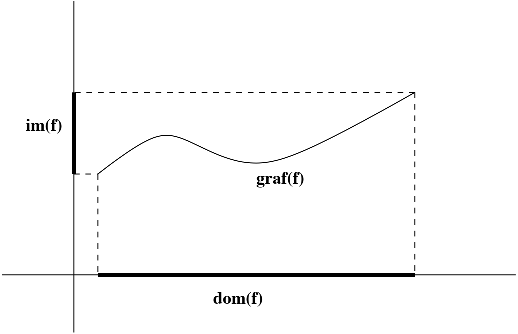
Nel caso in cui $B = \mathbb{R}$ la funzione si dice *reale*, se *dom*$(f) \subseteq \mathbb{R}$ la funzione si dice *di variabile reale*.

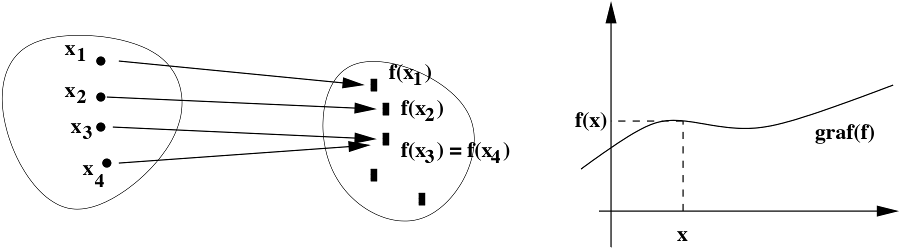
Nel caso in cui $dom(f) = \mathbb{N}$ la funzione si chiama *successione*. Di solito non si usa la notazione $y = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ ma si preferisce scrivere y_n (oppure a_n), si dice che n è l'indice dell'elemento y_n. La successione stessa può essere indicata con

$$y_0, y_1, y_2, \dots \quad \text{oppure con} \quad \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

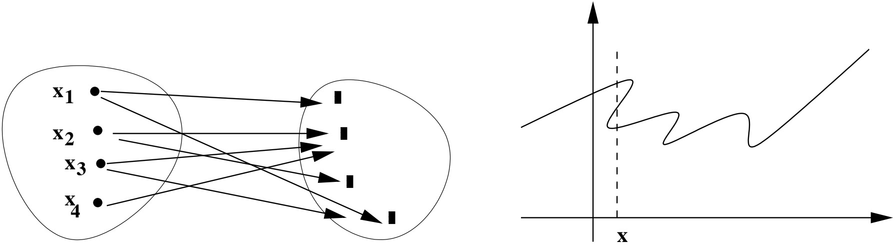
Il *grafico* di una funzione $f : A \to B$ è il sottoinsieme dell'insieme prodotto $A \times B$ composto dalle coppie $(x, f(x))$ per ogni $x \in A$. Il grafico di una funzione f sarà indicato con $graf(f)$, per $f : A \to B$ si ha quindi

$$graf(f) = \{(x, y) \in A \times B \ : \ x \in A, \ y = f(x)\}.$$





Sono funzioni



Non sono funzioni

Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

Sia $f : A \to B$ una funzione, se $b \in A$, un elemento $x \in A$ si chiama *controimmagine* di b tramite f quando $f(x) = b$. Se $Y \subseteq B$, si chiama controimmagine di Y tramite f l'insieme denotato con $f^{-1}(Y)$ costituito da tutte le controimmagini di tutti gli elementi $b \in Y$,

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \ : \ f(x) \in Y\}.$$

Se $im(f) = B$ la funzione f è detta *suriettiva*. Preso $b \in B$, se l'equazione $f(x) = b$ per $x \in A$ ha al più una soluzione la funzione si dice *iniettiva*. L'iniettività può essere scritta formalmente come

$$\forall\, x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

oppure, ricordando le proprietà dell'implicazione,

$$\forall\, x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

cioè elementi distinti si trasformano in elementi distinti. Una funzione è detta *biunivoca* o *biettiva* quando è suriettiva e iniettiva.

Esempio

(Funzione iniettiva) La legge che associa a ogni elemento $n \in \mathbb{N}$ l'elemento $2n \in \mathbb{N}$ (moltiplicazione per due) è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Essa identifica la successione $0, 2, 4, \ldots$ ossia $\{2n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Il dominio è $\mathbb{N}$, l'immagine è composto dagli interi naturali pari compreso lo zero. Rispetto a $\mathbb{N}$, la funzione non è suriettiva, qualsiasi intero dispari non è immagine di niente, mentre la funzione è iniettiva,

$$f(n) = 2n = f(m) = 2m \Leftrightarrow n = m \in \mathbb{N}.$$

Il grafico di questa funzione nel piano cartesiano usuale è composto da infiniti punti di coordinate $(n, 2n)$ con n intero naturale. ■

Esempio

(Funzione suriettiva) Sia A l'insieme degli italiani; la legge che associa a ogni elemento di A il suo gruppo sanguineo è una funzione di A nell'insieme dei simboli $\{\mathrm{A},\ \mathrm{AB},\ \mathrm{B},\ 0\}$. In questo caso la funzione è suriettiva ma non iniettiva (ci sono più italiani con il medesimo gruppo sanguineo). ■

Esempio

(Funzione biunivoca) La funzione che associa a ogni $x \in \mathbb{R}$ il suo quadrato x^2 è una funzione reale di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La funzione non è iniettiva: sia x che $-x$ condividono il medesimo quadrato, per esempio $(-2)^2 = (2)^2 = 4$. Si potrebbe pensare a una restrizione della stessa funzione, mantenendo la stessa regola di definizione ma considerando un dominio differente, per esempio l'intervallo $[0, +\infty)$. In questo modo si ottiene una nuova funzione che risulta essere iniettiva, anzi scegliendo come codominio lo stesso intervallo $[0, +\infty)$ avremo una funzione biunivoca. ■

Osservazione: Da quanto detto risulta che due funzioni f, g sono *uguali* se e solo se *dom*$(f) =$ *dom*(g) e $\forall\, x \in$ *dom*$(f) \quad f(x) = g(x)$.

Esempio

(Contiamo quanti sono I) Per contare quanti elementi ha un insieme uno strumento essenziale è quello di funzione biunivoca. Due insiemi A e B si dicono *equipotenti* quando esiste una funzione biunivoca $f : A \to B$. L'insieme $\{a, b, c\}$ è equipotente all'insieme $\{1, 2, 3\}$; l'insieme $\mathbb{N}$ è equipotente all'insieme dei pari con lo zero $\{0, 2, 4, 6, 8 \ldots\}$, anche $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ sono equipotenti, per esempio si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Tale funzione è biunivoca; per $x \geq 1$, infatti, produce gli interi naturali positivi pari, mentre per $x \leq -1$ gli interi naturali positivi dispari. Se esiste una funzione biunivoca tra l'insieme A e l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}$, si dice che A ha n elementi. Un insieme vuoto ha 0 elementi. Un insieme è finito quando esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che A abbia n elementi. Un insieme è infinito quando non è finito. Tra gli insiemi infiniti esistono poi altre categorie. Un insieme A si dice *numerabile* quando esiste una funzione biunivoca di $\mathbb{N}$ in A (o viceversa). L'insieme $\mathbb{Z}$ è numerabile così come l'insieme degli interi positivi pari. ■

Esempio

(Contiamo quanti sono II) Meno evidente il fatto che $\mathbb{Q}$ è numerabile. Limitiamoci a contare le frazioni p/q positive ridotte ai minimi termini. Disponiamo in un reticolo bidimensionale le frazioni, la prima riga con le frazioni con numeratore uguale a 1, la seconda riga con numeratore uguale a 2, e via di seguito. Per elencare questi razionali basta poi leggere questa tabella per diagonali, la frazione p/q è rappresentata dalla coppia corrispondente (p, q).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & \rightarrow & (1,2) & & (1,3) & \rightarrow & (1,4) & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Questa costruzione è essenzialmente dovuta a G.Cantor (1845-1918). Lo stesso Cantor ha dimostrato che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile. ∎

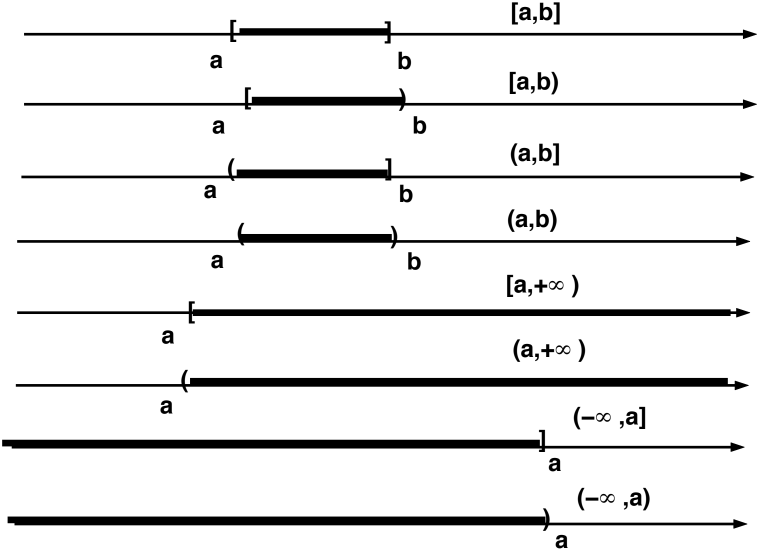
Intervalli

Un sottoinsieme non vuoto I di $\mathbb{R}$ tale che $\forall\, x, y \in I$ tutti i punti compresi tra x ed y appartengono ancora ad I si chiama *intervallo*. Per esempio l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq 6\}$ è un intervallo, mentre l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$ non è un intervallo. Se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ abbiamo

- intervallo chiuso $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\}$,
- intervallo aperto a destra (semiaperto) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\}$,
- intervallo aperto a sinistra (semiaperto) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\}$,
- intervallo aperto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$.

Gli intervalli sopra hanno come estremo inferiore a, come estremo superiore b e la lunghezza è uguale a $(b - a)$. Tra gli intervalli illimitati abbiamo

- intervallo chiuso illimitato superiormente $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x\}$,
- intervallo aperto illimitato superiormente $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x\}$,
- intervallo chiuso illimitato inferiormente $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq a\}$,
- intervallo aperto illimitato inferiormente $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} :\ x < a\}$.


[a,b]
a
b
[a,b)
a
b
(a,b]
a
b
(a,b)
a
b
[a,+∞)
a
(a,+∞)
a
(−∞ ,a]
a
(−∞ ,a)
a

La non numerabilità dell'insieme $\mathbb{R}$ porta alla scoperta, a prima vista sorprendente, che vi sono, in un certo senso, molti più numeri irrazionali che numeri razionali. A questo punto, ha più elementi l'intervallo $(0, 1)$ o la retta $\mathbb{R}$? Anche qui la risposta è non intuitiva: hanno lo "stesso numero di elementi", ovvero sono equipotenti. Per esempio, come vedremo in seguito, la funzione

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}, \quad x \in (0,1)$$

rappresenta una corrispondenza biunivoca di $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$.

Esempio

(Piano reale) Abbiamo detto che geometricamente $\mathbb{R}$ corrisponde a una retta: la retta reale. Analogamente all'insieme

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\} \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

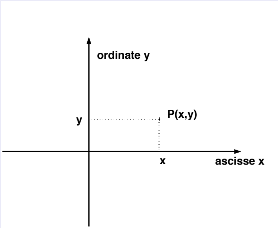
corrisponde il *piano reale*. Ossia un piano in cui si scelgono:

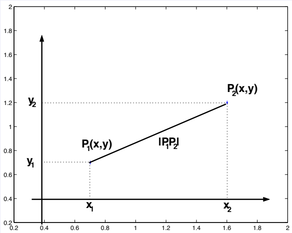
1. un punto O detto *origine* che corrisponderà alla coppia $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$;
2. due rette distinte passanti per O dette asse delle *ascisse* (o delle x) e asse delle *ordinate* (o delle y);
3. due punti P e Q, uno sull'asse delle x e l'altro sull'asse delle y, $P, Q \neq O$, a P corrisponde $(1, 0)$ mentre a Q la coppia $(0, 1)$.
4. un orientamento per entrambe le rette.

■

Esempio

(Riferimento cartesiano) Preso un punto S qualunque del piano sia V il punto in cui la parallela per S all'asse y incontra l'asse della ascisse e sia T il punto in cui la parallela per P all'asse x incontra l'asse delle ordinate. Sia x uguale alla misura algebrica del segmento orientato OV. Sia y la misura algebrica del segmento orientato OT. Al punto S corrisponderà quindi la coppia (x, y). In questo modo abbiamo costruito un *sistema di riferimento cartesiano* per $\mathbb{R}^2$. Se gli assi sono ortogonali abbiamo un sistema di riferimento *ortogonale*. Nel caso di sistemi ortogonali, dal *Teorema di Pitagora*, la distanza tra due punti P_1 e P_2 di coordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2) è uguale a $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.





Esempio

(Equazione della retta) Per ogni retta non verticale, presi due punti distinti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ della retta, il rapporto

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

è costante, tale rapporto rappresenta la pendenza della retta. Abbiamo quindi che per una retta passante per $P_1(x_1, y_1)$ e con pendenza m il generico punto $P(x, y)$ sulla retta soddisferà

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \Rightarrow \quad y = y_1 + m(x - x_1),$$

che è una forma dell'equazione della retta. Per una retta orizzontale, $m = 0$ e quindi $y = y_1$; per una retta verticale si ha invece l'equazione $x = x_1$. ■

Funzioni e operazioni

Come i numeri anche le funzioni possono essere "combinate" tra di loro attraverso operazioni aritmetiche. Consideriamo due funzioni reali f, g con il medesimo dominio

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad g : A \to \mathbb{R}.$$

Per ogni x appartenente al dominio comune definiamo le funzioni

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{“somma di } f \text{ e } g\text{”}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{“differenza di } f \text{ e } g\text{”}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{“prodotto di } f \text{ e } g\text{”}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), \quad \text{dove } g(x) \neq 0 \quad \text{“quoziente di } f \text{ e } g\text{”}.$$

Nel caso in cui i domini di f e g non coincidano occorre a volte considerare domini "ridotti", è sensato per esempio definire le operazioni in $dom(f) \cap dom(g)$.

Esempio

(Operazioni con funzioni) Se $f(x) = x^2, \quad x > 0$ e $g(x) = 3x + 1, \quad x > 0$ possiamo considerare

$$(f + g)(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$(f - g)(x) = x^2 - 3x - 1$$

$$(fg)(x) = x^2(3x + 1) = 3x^3 + x^2$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2}{3x + 1}$$

Ricordiamo che il quoziente è definito in quanto $\mathit{dom}(g) = (0, +\infty)$. ■

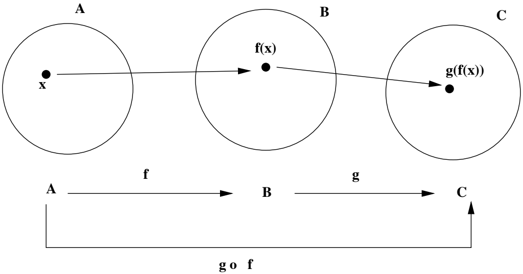
Composizione

Definizione

(Composizione di funzioni) *Siano* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *due funzioni, si dice* $\textit{funzione composta}$ *di* f *e* g *la funzione di* A *in* C *che si indica con* $g \circ f$ *e definita come*

$$g \circ f : A \to C \qquad x \mapsto g(f(x)).$$

Quindi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Ovviamente per la composizione basta che $\textit{im}(f) \subseteq \textit{dom}(g)$ senza richiedere che il codominio di f e dominio di g coincidano.

Esempio

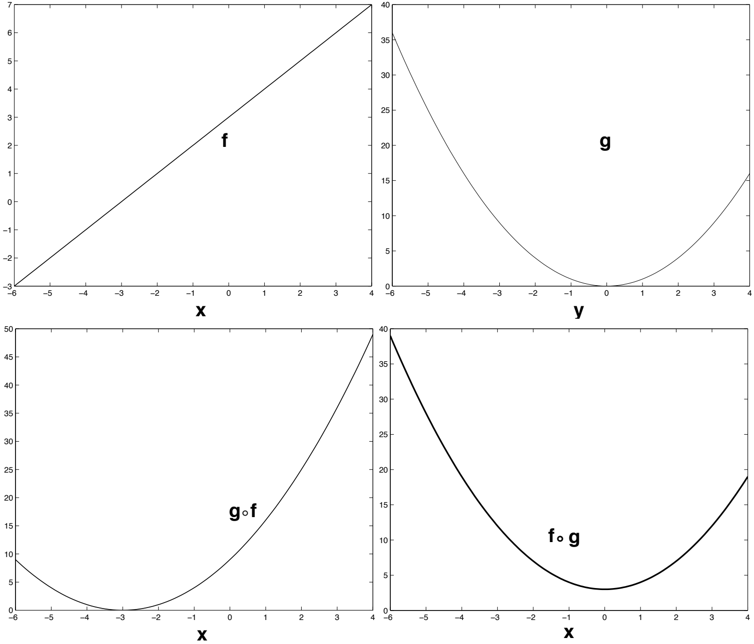
(La composizione non commuta) Determiniamo la funzione composta $g \circ f$ di $f(x) = x + 3$ e $g(y) = y^2$. Entrambe le funzioni si considerano come funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, per ogni fissato x dobbiamo prima applicare f ottenendo $f(x) = x + 3$, a questo punto applichiamo la funzione g,

$$z = g(y) = y^2 = (f(x))^2 = (x + 3)^2.$$

Abbiamo quindi una funzione che associa a x il valore $(x + 3)^2$. Questa è la funzione composta $(g \circ f)(x) = (x + 3)^2$, $\mathit{dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$, $\mathit{im}(g \circ f) = [0, +\infty)$. Scambiamo adesso il ruolo di f e g (sono funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, non abbiamo problemi di definizione). La funzione composta $f \circ g$ è data da

$$z = f(y) = y + 3 = (x^2) + 3 = x^2 + 3,$$

quindi $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$. Osserviamo che $\mathit{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$, mentre $\mathit{im}(f \circ g) = [3, +\infty)$. La funzione composta ottenuta è differente dalla precedente: la composizione non è in generale commutativa. Il risultato dipende dall'ordine in cui si sono applicate le funzioni. I grafici di f, $f \circ g$ e $g \circ f$ sono riportati nella Figura 2. ■


f
x
g
y
g∘f
x
f∘g
x

Esempio

(Non sempre si può comporre) Se studiamo la funzione composta di $f(x) = x + 3$ e $g(y) = 1/y$ ci accorgiamo che

$$\mathit{dom}(f) = \mathbb{R},\ \mathit{im}(f) = \mathbb{R},\ \mathit{dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \mathit{im}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Il punto $x = -3$ non può essere considerato nella composizione $g \circ f$. Possiamo comunque considerare la funzione composta definita dalla formula $(g \circ f)(x) = 1/(x + 3)$, ma attenzione al dominio $\mathit{dom}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Questo è un caso in cui $\mathit{im}(f) \not\subseteq \mathit{dom}(g)$, non rinunciamo a definire la funzione composta: la definiamo solo dove ha senso farlo.
Prendiamo invece $f(x) = -x^2 - 1$ e $g(y) = \sqrt{y}$ ossia la *funzione radice quadrata*. La funzione radice quadrata è definita solo per $y \geq 0$. Abbiamo,

$$\mathit{dom}(f) = \mathbb{R},\ \mathit{im}(f) = (-\infty, -1],\ \mathit{dom}(g) = [0, +\infty),\ \mathit{im}(g) = [0, +\infty).$$

In questo caso $\mathit{im}(f) \cap \mathit{dom}(g) = \varnothing$, non possiamo considerare la funzione composta $g \circ f$. La condizione minimale da porre per parlare di funzione composta è $\mathit{im}(f) \cap \mathit{dom}(g) \neq \varnothing$, in caso contrario le due funzioni non possono "passarsi" nulla. ■

Inversa

Abbiamo parlato di funzioni $f : A \to B$; è possibile, in qualche senso, costruire una funzione che riporti B in A? Appare ovvio che in presenza di più punti di A che finiscono tutti nel medesimo elemento di B questo non può avvenire: a quale elemento ritorniamo? In effetti occorre che l'equazione

$$y = f(x) \quad x \in A,\ y \in B$$

abbia al più una soluzione, ossia che la funzione sia iniettiva; potremmo allora restringerci all'insieme $\mathit{im}(f)$ e da questo "tornare indietro". Si noti che graficamente l'iniettivià equivale al fatto che tracciando una retta parallela all'asse delle ascisse questa interseca il grafico della funzione al più in un punto.

Esempio

(Misurare le temperature) La scala centigrada per la misura delle temperature è stata introdotta da A. Celsius nel 1742. In questa scala al punto di fusione del ghiaccio viene assegnato il valore 0, mentre al punto di ebollizione dell'acqua il valore 100, entrambi i fenomeni considerati a pressione normale. Nei paesi anglosassoni si è invece diffusa la scala di Fahrenheit, dal nome del suo ideatore. In questa scala ai fenomeni fisici menzionati si assegnano i valori 32 e 213, a 32 gradi Fahrenheit ($32°$ F) fa quindi freddo non caldo. Per i gradi centigradi si divide l'intervallo tra $0°$C e $100°$C in 100 parti uguali, ognuna corrisponde a un grado Celsius, $1°$C. Nell'altra scala di Fahrenheit si divide l'intervallo da 32 a 212 in 180 parti uguali. Se x è la misura di una temperatura in gradi centigradi e y in gradi Fahrenheit, avremo una relazione del tipo $y = f(x) = mx + q$, dove i parametri m e q sono tali che $f(0) = 32 \Rightarrow q = 32$, e $f(100) = 212 \Rightarrow m = 9/5$. Quindi $f(x) = (9/5)x + 32$. Vorremmo poter invertire tale relazione: passare dai gradi Fahrenheit a quelli Celsius. Ricavando x dall'equazione $y = (9/5)x + 32$ si ottiene $x = g(y) = (5/9)(y - 32)$. La funzione g potrebbe chiamarsi, in modo evidente, la funzione inversa di f. ■

Da quanto detto e dall'esempio appena fatto risulta intuitivo che i buoni candidati per l'operazione di inversione sono le funzioni iniettive.

Definizione

Siano A, B *due insiemi non vuoti,* f *una funzione iniettiva di* A *in* B*. Si chiama* $funzione\ inversa$ *di* f *la funzione da* $\mathit{im}(f)$ *in* $\mathit{dom}(f)$ *che associa a ogni elemento dell'immagine la sua unica controimmagine. La funzione inversa di* f *viene denotata con il simbolo* f^{-1}*.*

Elenchiamo alcune proprietà di f e f^{-1}.

$$i)\, \mathit{dom}(f^{-1}) = \mathit{im}(f), \qquad \mathit{im}(f^{-1}) = \mathit{dom}(f),$$

$$ii)\, \forall\, x \in \mathit{dom}(f^{-1}) \quad f(f^{-1}(x)) = x, \qquad \forall\, y \in \mathit{im}(f^{-1}) \quad f^{-1}(f(y)) = y,$$

$$iii)\, \forall\, x \in \mathit{dom}(f) \;\; \forall\, y \in \mathit{dom}(f^{-1}) \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Osservazione

Quando $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, possiamo considerare i sottoinsiemi descritti dalle equazioni $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$, cioè i grafici di f e f^{-1}. Dalle proprietà della funzione inversa, si nota che questi sono simmetrici speculari rispetto alla retta $y = x$. Infatti la trasformazione che porta il punto $P \in \textit{graf}(f)$, $P(x, f(x))$, nel punto $P'(x, f^{-1}(x))$, è l'operazione di simmetria rispetto a questa retta. Un esempio è mostrato nella Figura 3.

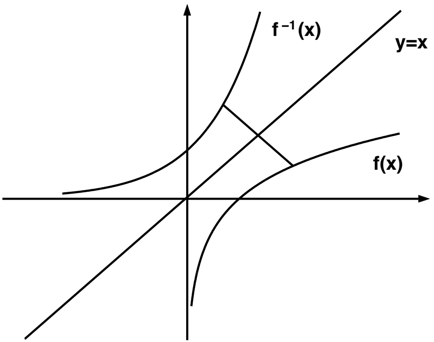


Figura: Grafico di f e f^{-1}.

Esempio

(Rette e funzioni inverse) Generalizzando l'esempio delle scale Celsius e Fahrenheit, possiamo considerare la funzione $y = f(x) = ax + b$ con $a \neq 0$ (ossia una retta non parallela all'asse delle ascisse). La funzione è iniettiva, infatti

$$ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Per il calcolo della funzione inversa,

$$y = f(x) = ax + b \Rightarrow x = f^{-1}(y) = (y - b)/a.$$

Verifichiamo, per esempio, che $f^{-1}(f(x)) = x$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{f(x) - b}{a} = \frac{ax + b - b}{a} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Esempio

(Radice quadrata come inversa) La funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva su tutta la retta reale. Definiamo una nuova funzione $F(x) = x^2,\ x \in [0, +\infty)$. Ora F è iniettiva, quindi è invertibile, indichiamo $F^{-1}(x)$ la sua inversa. Si verifica subito che con $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ossia coincide con la *funzione radice quadrata*. Notiamo anche che

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \forall\, x \geq 0, \quad \sqrt{x^2} = |x| \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

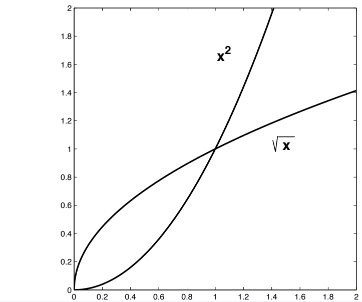


Figura: Grafico di $\sqrt{x}$ come grafico di una funzione inversa.

Esercizio

Trovare dominio e immagine delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = -\sqrt{(x-3)}, \quad f_2(x) = 1 + \sqrt[5]{x}, \quad f_3(x) = \frac{x}{x-1}, \quad f_4(x) = \log(\sin x).$$

Esercizio

Stabilire per quali valori dei parametri reali a *e* b *le seguenti funzioni risultano invertibili e determinare la funzione inversa.*

$$f_1 = \begin{cases} 2^x & x \geq 0 \\ x + a & x < 0 \end{cases}, \quad f_2 = \begin{cases} bx^2 & x \geq 0 \\ 3^x & x < 0 \end{cases}$$

Esercizio

Trovare $f+g$, fg, f/g *e specificare il loro dominio quando*

$$\text{(a)}\quad f(x)=x^3,\quad g(x)=2x^2-1;$$

$$\text{(b)}\quad f(x)=\sqrt{(x+2)},\quad g(x)=\sqrt{(2-x)}.$$

Esercizio

Trovare $g\circ f$, $f\circ g$, $f\circ f$, $g\circ g$ *e specificare il loro dominio quando*

$$\text{(a)}\quad f(x)=3x^2,\quad g(x)=\frac{1}{x-1};$$

$$\text{(b)}\quad f(x)=\sqrt{(x+1)},\quad g(x)=\sin x;$$

$$\text{(b)}\quad f(x)=\log(x),\quad g(x)=x+1;$$