Derivazione

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Esempio

(Pendenza retta tangente) Abbiamo già individuato il problema della determinazione della pendenza della retta tangente in un punto al grafico di una funzione (problema D). Sia $P(x_0, f(x_0))$ il punto in cui vogliamo valutare la pendenza della retta tangente, e $Q(x, f(x))$ un qualsiasi altro punto del grafico di f, $x \neq x_0$. La pendenza $m(x)$ della retta per P e Q vale

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\text{incremento di } f}{\text{incremento di } x},$$

questo rapporto è detto *rapporto incrementale* o *quoziente di Newton*. Posto $x = x_0 + h,\ h \in \mathbb{R}$, il rapporto incrementale diventa

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La pendenza limite sarà dunque,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

e rappresenta la definizione naturale di pendenza della retta tangente.

Esempio

(Legge di moto, velocità e accelerazione) Supponiamo che un oggetto si muova lungo una linea retta e che la posizione y sia una funzione del tempo t, $y = s(t)$. La velocità media v_m dell'oggetto nell'intervallo di tempo $[t, t+h]$, $h > 0$ è data da

$$v_m = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

I limite della velocità media per $h \to 0$ fornisce la *velocità istantanea* dell'oggetto all'istante t

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Abbiamo che l'accelerazione media dell'oggetto nello stesso intervallo di tempo sarà data da

$$a_m = \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

Potremo quindi definire l'*accelerazione istantanea* dell'oggetto come

$$a(t) = \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

Esempio

(Tasso di accrescimento) Sia $p(t)$ il numero di cellule al tempo t, il tasso di accrescimento medio nell'intervallo $[t_0, t_1]$ è uguale a

$$r(t_1, t_0) = \frac{p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Può essere utile considerare la variazione istantanea al tempo t_0 definita come

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0} = L(t_0).$$

Se $L(t_0) > 0$ vuol dire che al tempo t_0 la popolazione sta crescendo, per $L(t_0) = 0$, la popolazione è stazionaria, mentre se $L(t_0) < 0$ significa che la popolazione sta diminuendo.

Definizione (Derivata)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, e sia $x_0 \in I$ un punto interno a tale intervallo. Se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

la funzione è detta derivabile *in x_0. Tale limite prende il nome di* derivata *della funzione f nel punto x_0, e viene indicato con $f'(x_0)$.*

Osservazione

(Notazioni) La derivata di f in x_0 può essere indicata in modi differenti, tra cui

$$f'(x_0), \quad y', \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad \frac{dy}{dx}.$$

Normalmente utilizzeremo il primo simbolo $f'(x_0)$ salvo quando sarà comodo ricorrere a un altro. Se scriviamo, $x = x_0 + h$, si ottiene la definizione equivalente

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}.$$

Nel caso in cui $I = [a, b]$, se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ si può parlare di derivata destra $f'_+(a)$ in $x_0 = a$ e di derivata sinistra $f'_-(b)$ in $x_0 = b$, se esistono i limiti

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

o gli analoghi limiti per $h \to 0^+$ oppure per $h \to 0^-$. Ovviamente la derivata in x_0, punto interno, esiste se e solo se esistono e sono uguali la derivata destra e sinistra in x_0, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Esempio

(Calcolo di derivate dalla definizione) Calcoliamo le derivate delle funzioni elementari, $f_0(x) = c$ (costante) in $x_0 = 2$; $f_1(x) = \sqrt{x}$, in $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$; $f_2(x) = \sin x$ in $x_0 = 0$; $f_3(x) = x^2$ in $x_0 = 1$.

$$
\begin{aligned}
f_0'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f_0(x) - f_0(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{c-c}{x-2} = 0;\\
f_1'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(1+h)} - 1}{h} =\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{(1+h)} - 1)(\sqrt{(1+h)} + 1)}{h(\sqrt{(1+h)} + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{(1+h)} + 1)} = \frac{1}{2};\\
f_{1,+}'(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty;\\
f_2'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1;\\
f_3'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x-1} = 2.
\end{aligned}
$$

Esempio

(Valore assoluto) Consideriamo la funzione valore assoluto $f(x) = |x|, \ x \in \mathbb{R}$, e $x_0 = 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x).$$

Sappiamo che quest'ultimo limite non esiste (vale 1 a destra e -1 a sinistra), quindi f non ha derivata in 0 e non è derivabile in questo punto.

Esempio

(Equazione retta tangente) Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ ha pendenza $f'(x_0)$. Nel caso di funzione derivabile possiamo scrivere l'equazione di questa retta, infatti per $x \neq x_0$

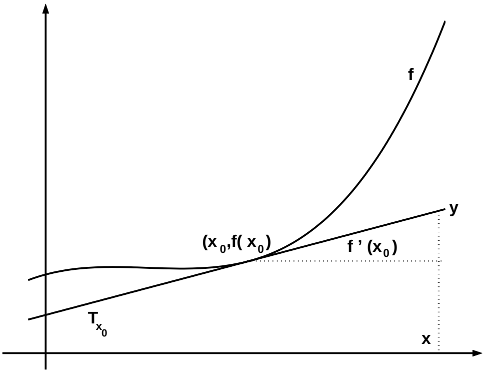
$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0},$$

da cui la retta tangente T_{x_0} ha equazione

$$T_{x_0} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esempio

(Equazione retta tangente - continuazione)



Se $f'(x_0) = +\infty$ (o $-\infty$), possiamo considerare come retta tangente la retta di equazione $x = x_0$. Si osservi come nelle vicinanze del punto x_0 il grafico della retta tangente T_{x_0} e il grafico di f siano essenzialmente sovrapposti.

Funzione derivata

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, possiamo considerare i punti del dominio I in cui tale funzione è derivabile e costruire una nuova funzione che associ a x il valore $f'(x)$,

$$x \;\mapsto\; f'(x), \qquad f \;\text{ derivabile }\; \text{in }\; x.$$

La nuova funzione così definita si chiama *funzione derivata* e sarà indicata con $f'(x)$.

Esempio

(Derivate di alcune funzioni) Se consideriamo la funzione $f(x) = c$ (costante), $x \in \mathbb{R}$, facilmente si verifica che f' è definita su tutta la retta reale e che $f'(x) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Se $f(x) = x$ dalla definizione otteniamo subito

$$\lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo adesso la funzione valore assoluto. Per $x \neq 0$ la funzione $f(x) = |x|$ è derivabile e risulta $f(x) = \text{sign}(x)$. Infatti $f(x) = x$ se $x \geq 0$ e $f(x) = -x$ se $x < 0$. Quindi dal caso precedente la derivata della funzione varrà $f'(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $f'(x) = -1$ se $x < 0$. Ossia $f'(x) = \text{sign}(x)$.

Esempio

(Derivate di alcune funzioni - continuazione) Calcoliamo ora le derivate di $f(x) = x^2$ e $f(x) = 1/x$. Nel primo caso otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Nel secondo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x}.$$

Infine la funzione radice $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ fornisce

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Si noti che non sempre le funzioni f e f' hanno il medesimo dominio: $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ con $f'(x) = \text{sign}(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ con $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

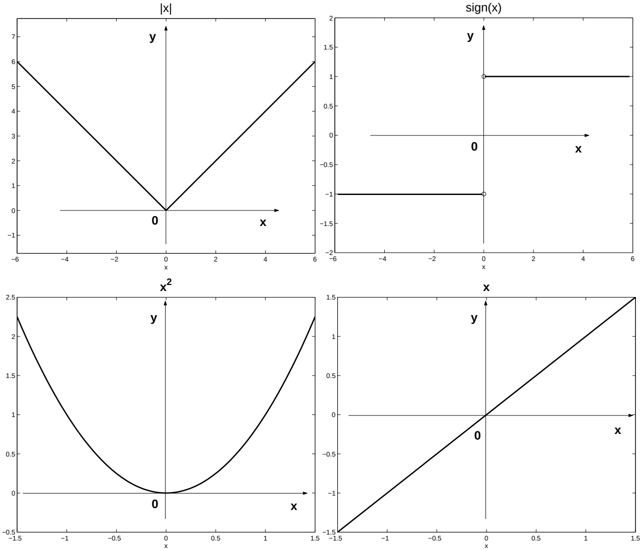


Figura: Le funzioni $|x|$ e x^2 e le rispettive derivate $\mathrm{sign}(x)$ e x.

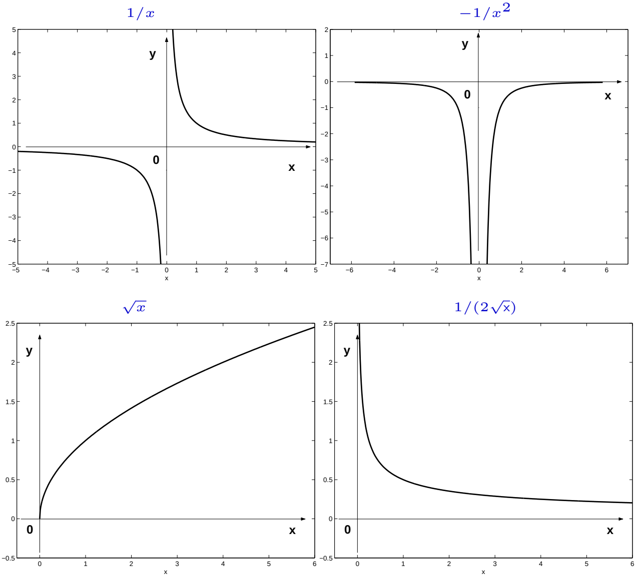


Figura: Le funzioni $1/x$ e $\sqrt{x}$ e le rispettive derivate $-1/x^2$ e $1/(2\sqrt{x})$.

Esempio

(Derivata di un monomio) Sia ora $g(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N},\ p > 0$, si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h},$$

ricordando che la differenza tra potenze $a^p - b^p$ si può scrivere come

$$a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + ab^{p-2} + b^{p-1}),$$

si ottiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h}\left((x+h)^{p-1} + (x+h)^{p-2}x + \ldots + (x+h)x^{p-2} + x^{p-1}\right) \ = \ px^{p-1}.$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che abbiamo p termini tutti convergenti a x^{p-1} per $h \to 0$. Si deduce quindi che la funzione derivata esiste per ogni x reale e $p > 0$ in $\mathbb{N}$

$$g(x) = x^p \ \Rightarrow \ g'(x) = px^{p-1}.$$

La formula precedente in realtà risulta valida per tutti i valori di x e p in $\mathbb{R}$ per i quali è definito x^{p-1}. Si veda l'esempio successivo.

La funzione esponenziale e il logaritmo naturale

Abbiamo incontrato nel capitolo precedente il numero e come limite per $x \to \infty$ della funzione

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

Se nelle funzioni esponenziali e logaritmiche scegliamo $a = e$, con e costante di Nepero, otteniamo *la funzione esponenziale*

$$y = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

la cui inversa è detta *logaritmo naturale*

$$\log_e y = \ln y = x.$$

Tali funzioni godono di particolari proprietà che affronteremo nel seguito.

Esempio

(Una derivata notevole) Osserviamo che il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Segue infatti da

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z,$$

dove $z = 1/x$. Nel caso di limite destro, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{z\to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \ln(e) = 1.$$

Analogamente per il limite sinistro, da cui si verifica il limite considerato. Questo dimostra che

$$\frac{d}{dx}\ln(1+x)\Big|_{x=0} = 1.$$

Teorema (Regole di derivazione)

Siano $f, \; g$ *due funzioni definite in* I *e derivabili in* $x_0 \in I$, c *una costante, allora*

i) *la funzione* cf *è derivabile in* x_0 *e* $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$;

ii) *la funzione* $f+g$ *è derivabile in* x_0 *e* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

iii) *la funzione* $f-g$ *è derivabile in* x_0 *e* $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;

iv) *la funzione* fg *è derivabile in* x_0 *e* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

v) *se* $g(x_0) \neq 0$ *la funzione* f/g *è derivabile in* x_0 *e vale*

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g'(x_0))^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Riportiamo la dimostrazione solo per la regola $iv)$. Sommiamo e togliamo la quantità $f(x_0+h)g(x_0)$ al numeratore del rapporto incrementale in modo tale da "separare" il contributo incrementale di f e di g, si ottiene

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))g(x_0) + f(x_0+h)(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} \\ = \; & g(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} \end{aligned}$$

da cui la formula desiderata attraverso le proprietà dei limiti. ∎

Derivabilitá e continuitá

Nella dimostrazione abbiamo sottinteso la continuità delle funzioni derivabili, per cui $f(x_0+h) \to f(x_0)$ per $h \to 0$. Supponiamo f derivabile in x_0, si ha

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \left(f(x+h) + f(x) - f(x)\right),$$

ma $f(x)$ è una costante rispetto al limite, quindi

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x) + \lim_{h\to 0} h\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} hf'(x) = f(x).$$

Possiamo quindi concludere che una funzione derivabile é continua.

Osservazione

Il viceversa è falso. Per esempio la funzione $f(x) = |x|$ *è continua in ogni* x *reale ma non è derivabile in* $x = 0$. *Da un punto di vista grafico infatti il concetto di continuità equivale alla possibilità di tracciare il grafico della funzione senza staccare la penna dal foglio. La derivabilità invece è una richiesta aggiuntiva, ossia che il grafico della funzione sia "liscio" ossia non presenti "spigoli".*

Esempio

(Derivate delle funzioni polinomiali) Nel caso di funzioni f, g derivabili per x appartenente a un dominio comune, le regole di calcolo permettono di costruire nuove derivate

$$(cf)'(x), \quad (f \pm g)'(x), \quad (fg)'(x), \quad (f/g)'(x) \quad \text{per} \quad g(x) \neq 0.$$

Le regole di derivazione possono anche essere utilizzate più volte consecutivamente, in questo modo possiamo dimostrare, per esempio, che tutte le funzioni polinomiali sono derivabili e vale

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \;\Rightarrow\; p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1},$$

da cui si deduce che anche la funzione derivata è una funzione polinomiale di grado almeno uno inferiore alla funzione di partenza.

Esempio

(Derivate delle funzioni trigonometriche) Ricordando che il limite, per $h \to 0$, di $\sin(h)/h$ vale 1 e la formula $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$, si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} -2 \frac{\sin^2(h/2)}{h} = \lim_{h \to 0} (-\sin(h/2)) \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 0.$$

Il limite appena trovato rappresenta la derivata della funzione coseno in $x = 0$, $\cos'(0) = 0$. Vediamo ora il calcolo della derivata della funzione seno in $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h \; + \; \sin h \cos x - \sin x}{h},$$

da cui

$$\sin'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} \; + \; \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x.$$

In modo analogo si ottiene $\cos'(x) = -\sin x$.
Dalle regole di calcolo della derivata possiamo dedurre che anche la funzione tangente è derivabile, nei punti dove $\cos x \neq 0$, e inoltre

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Teorema (Derivata della funzione composta)

Se f è definita in un intorno di x_0 e derivabile in x_0, se g è definita in un intorno di $f(x_0)$ e derivabile in $f(x_0)$ allora la funzione composta $g \circ f$ (supponendo di essere nelle condizioni di poterla definire) è derivabile in x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) \ = \ g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Esempio

Consideriamo la funzione $h(x) = \sqrt{(x^2+1)}$. Questa funzione é composizione della funzione $f(x) = x^2 + 1$, e $g(y) = \sqrt{y}$, cioè $h = g \circ f$. Si ha

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ y \neq 0 \ \text{ e } \ f'(x) = 2x.$$

Dalla formula della derivata della funzione composta si ottiene

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(\sqrt{1+x^2})2x = \frac{1}{2\sqrt{(x^2+1)}}2x = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}.$$

Osserviamo che la derivata è definita per ogni x in $\mathbb{R}$ perché $x^2 + 1 \neq 0$.

Un ultimo caso riguarda la derivata della funzione inversa. Consideriamo un caso particolare. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, derivabile e invertibile, inoltre supponiamo di sapere che anche f^{-1} è derivabile. Dalla relazione

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall\, x \in I,$$

derivando entrambi i membri si ottiene, dalla regola di derivazione della funzione composta.

Teorema (Derivata della funzione inversa)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona, se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e vale la formula

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad y_0 = f(x_0).$$

Esempio

(Derivate delle funzioni circolari inverse) Sia $f(x) = \sin x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, calcoliamo la derivata della funzione arcoseno. Posto $y = \sin x$, si ha $f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, quindi

$$\arcsin' y = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

In modo analogo si calcolano, negli opportuni domini,

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Esempio

(Derivate delle funzioni esponenziali e delle loro inverse) Vediamo il calcolo della derivata di una funzione esponenziale $f(x) = a^x, \ x \in \mathbb{R}$ e di una funzione logaritmica $\log_a x, \ x > 0$. Per la funzione $f(x) = a^x$, $a > 0$ si ottiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ f'(0).$$

Il valore $f'(0)$ dipende dalla base a, ovviamente per $a = 1$ abbiamo la funzione costante e $f'(0) = 0$. Tra i valori della base $a > 0$, $a \neq 1$ esiste un unico valore tale che $f'(0) = 1$ (quindi un unica funzione esponenziale per cui la retta tangente nel punto di ascissa $x = 0$ ha pendenza 1). Ritroviamo in questo modo il valore e, costante di Nepero. Per verificarlo osserviamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} \cdot \ln a = \ln a,$$

posto $z = a^h - 1$ e ricordando il limite fondamentale di $\ln(z+1)/z$ per $z \to 0$.

Esempio

(Funzioni esponenziali e loro inverse - continuazione) La derivata dell'esponenziale soddisferà dunque

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

L'esponenziale è l'unica funzione che soddisfa un'equazione del tipo $y' = y$.
La derivata del logaritmo naturale vale,

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Per una generica funzione esponenziale e per un generico logaritmo possiamo ricondurci alla base e

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}, \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

e, dalle regole della derivata della funzione composta,

$$\frac{d}{dx}a^x = \ln a \cdot a^x, \quad \frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

Nella Tabella riportiamo alcune derivate di funzioni elementari.

Funzione f	**Derivata** f'	**Dominio derivata**
c (costante)	0	$x \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$	$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$x > 0$
$1/x$	$-1/x^2$	$x \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$	$x \; : \; \cos x \neq 0$
x^r	$r x^{r-1}$	$x > 0$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$x > 0$

Tabella: Derivate di funzioni elementari.

Esercizi

Esercizio

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni specificando il dominio della funzione derivata,

$$f_1(x) = 3e^x + \ln(x+2), \quad f_2(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$f_3(x) = e^x(\cos x + \sin x), \quad f_4(x) = \frac{e^x + \sin x}{x}.$$

Esercizio

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = (x+1)\ln^2(x+1), \quad f_2(x) = xe^{\sin x},$$

$$f_3(x) = x^{1/(1-x)}, \quad f_4(x) = x^2 \, |\cos x|.$$

Esercizio

Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti specificati

$$f_1(x) = x + 1/x \;\; in \;\; (1,2), \;\; f_2(x) = \sqrt{|x|} \;\; in \;\; (1,1),$$

$$f_3(x) = e^x \cos x \;\; in \;\; (0,1), \;\; f_4(x) = 1 + \sin|x| \;\; in \;\; (\pi/2, 2).$$

Esercizio

Trovare i punti della curva di equazione $y = x^3 - 3x + 5$ *per i quali la retta tangente sia* (a) *parallela alla retta* $y_1 = -2x$*;* (b) *perpendicolare alla retta di equazione* $y_2 = -x/9$*.*