Determinante, autovalori e autovettori

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica, Universitá di Ferrara

http://www.lorenzopareschi.com
lorenzo.pareschi@unife.it

Determinante

Definizione (Matrici di permutazione)

Definiamo le matrici P_{rs}, dette matrici di permutazione elementari, *ottenute dalla matrice identità scambiando le righe r e s.*

Esempio (Matrici di permutazione)

Un'esempio di matrice di permutazione a partire da

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la seguente ($r = 2$, $s = 3$)

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $P_{rs}A$ è una matrice uguale ad A ma con le righe r ed s scambiate fra loro. Analogamente AP_{rs} è una matrice uguale ad A ma con le colonne r ed s scambiate fra loro.

Definizione (Determinante)

Dato l'insieme delle matrici quadrate di ordine n, a ogni matrice A di questo insieme associamo un numero che indicheremo con $\det(A)$, detto determinante di *A, tale che*

1. *Se A è una matrice triangolare (superiore o inferiore), allora $\det(A)$ è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.*
2. *Se A e B sono due matrici quadrate di ordine n,*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \ .$$

3. $\det(P_{rs}) = -1$ *per ogni valore di r, s con $r \neq s$.*

Proprietà del determinante

- 1. Se la matrice A ha due righe o due colonne uguali il determinante è nullo.

  DIMOSTRAZIONE. Sia infatti P_{rs} con r e s indici delle righe o colonne uguali. Allora se le righe sono uguali $P_{rs}A = A$, se invece le colonne sono uguali $AP_{rs} = A$. Nel primo caso avremo

$$\det(A) = \det(P_{rs}A) = \det(P_{rs})\det(A) = -\det(A)$$

  ossia

$$\det(A) = -\det(A) \qquad \textsf{quindi} \quad \det(A) = 0 \ .$$

  Analogamente nell'altro caso si ha

$$\det(A) = \det(AP_{rs}) = \det(A)\det(P_{rs}) = -\det(A) \qquad \textsf{quindi} \quad \det(A) = 0 \ .$$

  ■

- 2. Dato α in $\mathbb{R}$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

  DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$\det(\alpha A) = \det(\alpha I A) = \det(\alpha I)\det(A) = \alpha^n \det(A)$$

  perché $\alpha I = \textsf{diag}(\alpha, ..., \alpha)$ e il determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale, ossia α^n. ■

- 3. Se $\overline{A}$ è la matrice ottenuta moltiplicando tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) di A per α allora $\det(\overline{A}) = \alpha \det(A)$.

  DIMOSTRAZIONE. Per esempio sia $\overline{A}$ ottenuta moltiplicando la prima riga per α, allora

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} A$$

  quindi $\det(\overline{A}) = \alpha \det(A)$. ■

- 4. Se una riga o una colonna di A sono nulli, il determinante sarà nullo.

  DIMOSTRAZIONE. Discende direttamente dalla proprietà precedente nel caso $\alpha = 0$. ■

- 5. Se una riga o una colonna di A è combinazione lineare delle altre allora il determinante è nullo.

  DIMOSTRAZIONE. Per esempio indichiamo con A_j^T la riga j-esima che è combinazione lineare delle altre (per semplicità solo di quelle che la precedono)

$$A_j^T = \alpha_1 A_1^T + \alpha_2 A_2^T + \ldots + \alpha_{j-1} A_{j-1}^T \ .$$

Moltiplicando ora la matrice A a sinistra per la matrice triangolare inferiore

$$P = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
-\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{j-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} & \leftarrow (riga\ j) \\
\uparrow\ (colonna\ j) &
\end{array}$$

si ottiene la matrice PA in cui la riga j-esima è nulla. Quindi

$$0 = \det(PA) = \det(P)\det(A).$$

Ma $\det(P) = 1$ e quindi necessariamente $\det(A) = 0$. ∎

- 6. Sia A non singolare. Allora

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti da

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

segue

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1.$$

■

Esempio (Casi particolari matrici 2×2)

Nel caso di una matrice 2×2 si può verificare direttamente che se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora

$$\det(A) = ad - bc,$$

verifica le tre proprietà che caratterizzano il determinante.

Esempio (Casi particolari matrici 3×3)

Nel caso di una matrice 3×3 si può verificare che se

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

allora

$$\det(A) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

Un metodo pratico per ricordarsi la precedente formula è dato dalla regola delle diagonali illustrata di seguito

$$\left| \begin{array}{ccccccc|ccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & & a_1 & & a_2 \\ & \searrow & & \times & & \times & & & \swarrow & \\ b_1 & & b_2 & & b_3 & & & b_1 & & b_2 \\ & \times & & \times & & \times & & & \searrow & \\ c_1 & & c_2 & & c_3 & & & c_1 & & c_2 \end{array} \right. \qquad \textit{regola delle diagonali}$$

dove i prodotti diagonali da sinistra a destra vanno considerati con il segno $+$, quelli da destra a sinistra con il segno $-$.

Esempio (Calcolo con la regola delle diagonali)

Sovente si utilizza la notazione $|\cdot|$ per indicare il determinante di una matrice. Avremo quindi per matrici 2×2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10.$$

e nel caso di matrici 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 - 4 - 12 + 2 + 2 = -23.$$

Autovalori e autovettori

Uno dei problemi più importanti dell'algebra lineare é rappresentato dal calcolo degli autovalori e autovettori di una matrice quadrata. Nelle applicazioni tali quantità intervengono come assi preferenziali di rotazione, direzioni di maggior sforzo, frequenze di risonanza, ecc.

Definizione (Autovalore e autovettore)

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ ad elementi reali. Definiamo autovalore *e rispettivamente* autovettore *della matrice A un numero λ ed un vettore u non nullo per cui*

$$Au = \lambda u$$

o equivalentemente

$$(A - \lambda I)u = 0.$$

Dalla definizione precedente segue che u è una soluzione non nulla di un sistema lineare omogeneo di matrice $A - \lambda I$

$$Au = \lambda u \Rightarrow Au - \lambda u = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)u = 0.$$

Osservazione

Se u è un autovettore di A, tale è anche αu, con α numero reale o complesso non nullo

$$A(\alpha u) = \alpha(Au) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u).$$

Ossia gli autovettori sono infiniti. In particolare potremo sempre scegliere l'autovettore unitario. Infatti se u è un autovettore e

$$u^T u = c^2 \neq 0$$

allora $v = u/c$ è un autovettore unitario

$$v^T v = \frac{1}{c^2} u^T u = \frac{1}{c^2} c^2 = 1.$$

Una proprietà (che non dimostreremo) utile al fine di controllare i risultati nel calcolo di autovalori (e autovettori)

Proposizione

La somma degli autovalori di una matrice A uguaglia la somma degli elementi sulla diagonale della matrice A. Tale somma è detta traccia *della matrice A.*

Determinante e sistemi lineari omogenei

Sia ora A quadrata di tipo $n \times n$. Il sistema lineare omogeneo

$$Ax = 0$$

ammette sempre la soluzione identicamente nulla $x = 0$. In particolare se la soluzione é unica, allora tale soluzione coincide con $x = 0$.
Vale il seguente risultato

Teorema

Il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, con A matrice quadrata ammette soluzione non nulla $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo l'implicazione $\Rightarrow$. Se il sistema ammette una soluzione $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ allora indicate con $A_1, \ldots, A_n$ le colonne di A abbiamo

$$Ax = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = 0,$$

con x_i, $i = 1, \ldots, n$ non tutti nulli. Dunque se $x_j \neq 0$ possiamo scrivere

$$A_j = -\frac{x_1}{x_j} A_1 - \ldots - \frac{x_{j-1}}{x_j} A_{j-1} - \frac{x_{j+1}}{x_j} A_{j+1} - \ldots - \frac{x_n}{x_j} A_n.$$

Dalla proprietá 5 del determinante applicata alle colonne si ha $\det(A) = 0$. ∎

Calcolo di autovalori e autovettori

Sia ora A quadrata di tipo $n \times n.$ Vogliamo risolvere il problema del calcolo pratico di autovalori e autovettori affrontando il sistema lineare

$$(A - \lambda I)u = 0,$$

con u non nullo.
Sappiamo che il calcolo di una soluzione non nulla u è possibile se e soltanto se $\det(A - \lambda I) = 0$. L'equazione

$$\text{det}(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$$

è detta *equazione caratteristica* di $A.$ Più precisamente si calcola il determinante della *matrice caratteristica*

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

ottenuta da A sottraendo λ da ogni elemento della diagonale di A. Si può dimostrare che $\det(A - \lambda I)$ è un polinomio di grado n in λ

$$p_A(\lambda) = \text{det}(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0$$

detto *polinomio caratteristico*.

In pratica, quindi, per calcolare autovalori e autovettori dobbiamo:

1. determinare le radici del polinomio caratteristico
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0;$$
2. per ogni autovalore determinato al punto 1), risolvere il sistema lineare
$$(A - \lambda I)u = 0$$
per calcolare gli autovettori associati a λ.

La risoluzione del punto 1) rende il problema del calcolo degli autovalori molto difficile. Evariste Galois (1811-1832) ha infatti dimostrato che non esiste nessuna formula algebrica per calcolare le radici di un polinomio di grado $n \geq 5$. Un caso particolarmente facile è il caso di matrici triangolari. Abbiamo infatti

Proposizione

Se A è una matrice triangolare allora gli autovalori coincidono con gli elementi della diagonale.

Dimostrazione. La dimostrazione del risultato è immediata, basta osservare che se la matrice triangolare ha dimensione n vale
$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$
■

In pratica, nel caso generale, solo per $n = 2$ la cosa è immediata, con la nota formula risolutiva di un'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

che implica

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Per $n = 3$ la formula non è così diretta. Se però si è in grado di indovinare una radice del polinomio, sia λ^*, allora si può scrivere

$$-\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = (\lambda - \lambda^*)(-\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)$$

con

$$\lambda^* + b_1 = c_2,\ -\lambda^* b_1 + b_0 = c_1,\ -\lambda^* b_0 = c_0.$$

Ossia

$$b_1 = c_2 - \lambda^*, \quad b_0 = c_1 + \lambda^*(c_2 - \lambda^*).$$

Il calcolo delle restanti due radici può quindi essere effettuato sul polinomio di grado due

$$-\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0.$$

Esempio (Autovalori e autovettori di matrici 2×2)

Calcoliamo gli autovalori e autovettori di

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 \\ -2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = -(5-\lambda)(4+\lambda) + 14 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3) = 0$$

implica che gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$.
a) $\lambda_1 = -2$

$$(A - \lambda_1 I)u = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc} 7 & 7 & \\ -2 & -2 & \\ \hline & & \\ 1 & 1 & (R_1/7) \\ 0 & 0 & (R_2 - 2R_1) \end{array}$$

ossia $y = s,\ x = -s$ con s in $\mathbb{R}$. Gli autovettori hanno la forma $u = (-s, s)^T$.

Esempio (continuazione)

b) $\lambda_2 = 3$

$$(A - \lambda_2 I)u = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 7 & \\ -2 & -7 & \\ \hline & & \\ 1 & 7/2 & (R_1/2) \\ 0 & 0 & (R_2 + 2R_1) \\ \hline \end{array}$$

ossia $y = s,\ x = -7s/2$ con s in $\mathbb{R}$. Gli autovettori hanno la forma $u = (-7s/2, s)$.

Esempio (Altre situazioni per matrici 2×2)

Vediamo altre situazioni che si possono presentare nel caso di matrici 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda = 2$, radice doppia.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccl} 0 & 3 & \\ 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & (R_1/3) \\ 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

otteniamo $y = 0$, $x = s$ e quindi $u = (s, 0)^T$.

Esempio (continuazione)

Consideriamo ora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda = 1$, radice doppia.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

otteniamo $x = s$, $y = t$. Ogni vettore $u = (s, t)^T$ è un autovettore (ossia ogni vettore in $\mathbb{R}^2$).

Esempio (Autovalori e autovettori di matrici 3×3)

Vediamo ora il caso di matrici 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 6-\lambda & 2 \\ 16 & -15 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)(-5-\lambda) + 2 \cdot 15(3-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)[(6-\lambda)(-5-\lambda)+30] = (3-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = \lambda(3-\lambda)(\lambda-1).$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda = 0, 3, 1$ (la presenza dell'autovalore nullo indica che $\det(A) = 0$).

a) $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio (continuazione)

$$\begin{array}{cccl}
3 & 0 & 0 & \\
-4 & 6 & 2 & \\
16 & -15 & -5 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & (R_1/3) \\
0 & 6 & 2 & (R_2+4R_1) \\
0 & -15 & -5 & (R_3-16R_1) \\
\hline
1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1/3 & (R_2/6) \\
0 & 0 & 0 & (R_3+15R_2) \\
\hline
\end{array}$$

quindi $z = s$, $y = -\dfrac{1}{3}s$, $x = 0$ e $u_1 = \left(0, -\dfrac{1}{3}s, s\right)^T$ autovettore.

Esempio (continuazione)

b) $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ 16 & -15 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccl} 2 & 0 & 0 & \\ -4 & 5 & 2 & \\ 16 & -15 & -6 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & (R_1/2) \\ 0 & 5 & 2 & (R_2 + 4R_1) \\ 0 & -15 & -6 & (R_3 - 16R_1) \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2/5 & (R_2/5) \\ 0 & 0 & 0 & (R_3 + 15R_2) \\ \hline \end{array}$$

quindi $z = s$, $y = -\frac{2}{5}s$, $x = 0$ e $u_2 = \left(0, -\frac{2}{5}s, s\right)^T$ autovettore.

Esempio (continuazione)

c) $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 16 & -15 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccl} 0 & 0 & 0 & \\ -4 & 3 & 2 & \\ 16 & -15 & -8 & \\ \hline -4 & 3 & 2 & (R_1 \leftrightarrows R_2) \\ 16 & -15 & -8 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & -3/4 & -1/2 & (R_1/(-4)) \\ 0 & -3 & 0 & (R_2 - 16R_1) \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Esempio (continuazione)

$$\begin{array}{cccl} 1 & -3/4 & -1/2 & \\ 0 & 1 & 0 & (R_2/-3) \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

quindi $z = s$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}s$ e $u_3 = \left(\frac{1}{2}s, 0, s\right)^T$ autovettore.

Esempio (Altri casi matrici 3×3)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda)-4-4+2\lambda+2(4-\lambda)+4(3-\lambda) = -\lambda^3+12+7\lambda^2-16\lambda = 0.$$

Proviamo a indovinare una radice del polinomio:
$\lambda = 0$ no.
$\lambda = 1, -1$ no.
$\lambda = 2$ si.

$$(\lambda - 2)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$, ossia l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica due.

Esempio (continuazione)

a) $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccl} 2 & -2 & 1 & \\ 2 & -2 & 1 & \\ 2 & -2 & 1 & \\ \hline 1 & -1 & 1/2 & (R_1/2) \\ 0 & 0 & 0 & (R_2 - 2R_1) \\ 0 & 0 & 0 & (R_3 - 2R_1) \\ \hline \end{array}$$

quindi $z = s$, $y = t$, $x = t - \frac{1}{2}s$.

Ogni vettore $u = \left(t - \frac{1}{2}s, t, s\right)^T$ è autovettore.

Esempio (continuazione)

b) $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & \\ 2 & -3 & 1 & \\ 2 & -2 & 0 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & (R_2 - 2R_1) \\ 0 & 2 & -2 & (R_3 - 2R_1) \\ \hline 1 & -2 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & (R_3 - 2R_2) \\ \hline \end{array}$$

quindi $z = s$, $y = s$, $x = s$ e $u_3 = (s, s, s)^T$ unico autovettore.

Esercizi

Esercizio

Si calcolino i determinanti delle seguenti matrici

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(d)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (e)\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (f)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio

Per ciascuna delle seguenti matrici

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad (ii)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (iii)\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(iv)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (v)\ A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 10 \\ -4 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad (vi)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(vii)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare i rispettivi autovalori e autovettori;