Sistemi lineari

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Sistemi lineari e matrici

Sia A una matrice di tipo $m \times n$ e x un vettore di dimensione m. Il prodotto Ax è un vettore di m componenti che indicheremo con b.
Per esteso avremo che $Ax = b$ diventa

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

detto *sistema lineare*
Un'equazione *lineare* è un'equazione nella quale le incognite, usualmente indicate con x, y, z, $\ldots$ oppure x_1, x_2, x_3, $\ldots$, compaiono tutte al primo grado nella forma $ax + by + cz + \ldots$, con a, b, c numeri reali (o complessi). In altre parole non compaiono quadrati, cubi o potenze più elevate, né prodotti di due o più incognite, né funzioni delle incognite tipo radice, seno, coseno, esponenziale, ecc..

Esempio

(Sistemi lineari) Riportiamo alcuni esempi di sistemi lineari e la loro corrispondente rappresentazione matriciale

1. $$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 1 \\ x-2y & = & 4 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. $$\left\{ \begin{array}{rcl} x-2y+z & = & 5 \\ 3x+y-z & = & 0 \\ x+3y+2z & = & 2 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. $$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1+x_2-x_3 & = & 4 \\ 2x_1-x_2+3x_3 & = & 7 \\ 4x_1+x_2+x_3 & = & 15 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Problema

Dato il vettore b determinare x *soluzione* del sistema lineare, ossia tale che $Ax = b$. Tale problema è rappresentato da un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$. Gli elementi della matrice A sono detti *coefficienti* del sistema lineare. Gli elementi del vettore b sono detti *termini noti*.

Non è sempre detto che dato b possano determinarsi $x_1, ..., x_n$ tali che $Ax = b$, ossia che il sistema possa essere risolto. Un sistema lineare che non ammette nessuna soluzione è detto *inconsistente*. Se il termine noto è un vettore nullo $b = 0$, il sistema si dice *omogeneo* e in tal caso ammette sempre la soluzione banale data dal vettore nullo $x = 0$ (la cui verifica è lasciata come esercizio).

Esempio

(Sostituzione con due equazioni) Consideriamo il sistema di 2 equazioni in 2 incognite

$$\begin{cases} 2x + 3y & = & 1 \\ x - 2y & = & 4 \end{cases}$$

Un primo modo per risolverlo è basato sulla *tecnica di sostituzione*. Ossia si ricava y in funzione di x nella seconda equazione e la si sostituisce nella prima.

$$2y = x - 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$2x + 3\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 1 \Rightarrow \frac{7}{2}x = 7 \Rightarrow x = 2.$$

Sostituendo ora nella prima relazione si ha $y = 1 - 2 = -1$. Da cui la soluzione $x = 2$, $y = -1$. Questo modo di procedere risulta però complesso nel caso di sistemi più grandi e può facilmente portare a errori di calcolo.

Esempio

(Eliminazione con due equazioni) Una tecnica più efficiente è data dal *metodo di eliminazione*. L'idea in questo caso è quella di eliminare le variabili incognite una ad una fino a ottenere il valore della soluzione per una variabile. Ottenuto questo si procede come in precedenza per sostituzione. Nel sistema precedente x può essere eliminata moltiplicando la seconda equazione per 2

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ 2x - 4y & = & 8 \end{array} \right.$$

Sostituisco alla seconda equazione quella ottenuta sottraendo la prima dalla seconda ossia

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ -7y & = & 7 \end{array} \right.$$

Per cui $y = -1$ e dalla prima

$$2x - 3 = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Esempio

(Eliminazione con tre equazioni) Proviamo a estendere la precedente idea dell'eliminazione di variabili al caso di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 5 \\ 3x + y - z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 2 \end{cases}$$

La somma delle prime due equazioni consente di eliminare z (sostituiamo il risultato nella seconda) ed effettuiamo l'eliminazione di z nella terza sommando a questa due volte la seconda (sostituiamo il risultato nella terza).

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 5 \\ 4x - y &= 5 \\ 7x + 5y &= 2 \end{cases}$$

Esempio

(Continuazione) Si noti che la seconda e la terza equazione rappresentano ora un sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 4x - y & = & 5 \\ 7x + 5y & = & 2 \end{cases}$$

Possiamo eliminare y aggiungendo cinque volte la prima equazione alla seconda

$$27x = 27 \Rightarrow x = 1.$$

Dalla prima equazione avremo $4 - y = 5 \Rightarrow y = -1$.
Infine sostituendo questi due valori in una delle equazioni date inizialmente (per esempio la prima)

$$1 + 2 + z = 5 \Rightarrow z = 2.$$

La soluzione è quindi $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

Eliminazione di Gauss

- Nel caso di un sistema di n equazioni in n incognite l'idea di base è quella di ricondursi a un sistema di $n-1$ equazioni in $n-1$ incognite, poi a un sistema di $n-2$ equazioni in $n-2$ incognite e così via fino alla risoluzione del sistema per sostituzione.
- Il vantaggio di questo metodo è che si basa su poche semplici operazioni che sono ripetute a ogni passo. Tale metodo infatti, noto come *metodo di eliminazione di Gauss*, può essere facilmente messo in forma algoritmica ed implementato su di un calcolatore.
- Consideriamo il seguente esempio ed osserviamo come ogni nostra operazione comporti una corrispondente operazione sulla matrice del sistema.

Esempio

(Eliminazione e matrici) Applichiamo passo a passo l'eliminazione di Gauss al sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Indichiamo a fianco di ogni riga R_1, R_2, R_3 la corrispondente operazione.

Passo 1

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{3}{2}x_3 & = & \frac{1}{2} & (R_1/2) \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -8 & \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 & \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esempio

(Continuazione)

Passo 2

$$\left\{\begin{array}{rcll} x_1 - \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{3}{2}x_3 & = & \dfrac{1}{2} & \\ 4x_2 - 7x_3 & = & -10 & (R_2 - 4R_1) \\ \dfrac{5}{2}x_2 - \dfrac{5}{2}x_3 & = & -\dfrac{5}{2} & (R_3 - 3R_1) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & \dfrac{5}{2} & -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -10 \\ -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Passo 3

$$\left\{\begin{array}{rcll} x_1 - \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{3}{2}x_3 & = & \dfrac{1}{2} & \\ x_2 - \dfrac{7}{4}x_3 & = & -\dfrac{5}{2} & (R_2/4) \\ \dfrac{5}{2}x_2 - \dfrac{5}{2}x_3 & = & -\dfrac{5}{2} & \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{7}{4} \\ 0 & \dfrac{5}{2} & -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Esempio

(Continuazione)

Passo 4

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{3}{2}x_3 & = & \dfrac{1}{2} \\ \qquad x_2 - \dfrac{7}{4}x_3 & = & -\dfrac{5}{2} \\ \qquad\qquad \dfrac{15}{8}x_3 & = & \dfrac{15}{4} \quad (R_3 - \dfrac{5}{2}R_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{7}{4} \\ 0 & 0 & \dfrac{15}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{15}{4} \end{pmatrix}$$

Passo 5

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{3}{2}x_3 & = & \dfrac{1}{2} \\ \qquad x_2 - \dfrac{7}{4}x_3 & = & -\dfrac{5}{2} \\ \qquad\qquad x_3 & = & 2 \quad (R_3/\dfrac{15}{8}) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esempio

(Continuazione) La terza equazione fornisce $x_3 = 3$. Dalla seconda equazione otteniamo

$$x_2 - \frac{7}{4} \cdot 2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = 1$$

e dalla prima

$$x_1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -2.$$

La soluzione quindi è

$$x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$$

Trasformiamo la matrice del sistema in una matrice triangolare superiore con termini diagonali uguali a 1, corrispondente ad un sistema lineare che ha esattamente le stesse soluzioni del sistema di partenza.

Definizione (Sistemi lineari equivalenti)

Due sistemi lineari aventi lo stesso numero di incognite si dicono equivalenti *se hanno esattamente le stesse soluzioni.*

La matrice finale del sistema è anche detta *matrice ridotta a scala* o semplicemente *matrice ridotta*.
Si noti che abbiamo seguito una strategia ben precisa nell'eliminare le variabili. Infatti abbiamo prima eliminato gli elementi della prima colonna con indice di riga maggiore di uno, poi gli elementi della seconda colonna con indice di riga maggiore di due e così via, fino ad avere tutti elementi nulli al di sotto della diagonale principale della matrice di partenza. Inoltre abbiamo moltiplicato ogni colonna per una opportuna costante, detta *pivot* (nell'Esempio i pivot sono 2, 4 e $15/8$) in modo da avere elementi uguali a uno sulla diagonale.

Schema eliminazione di Gauss

$$
\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & * & * \\ * & * & * & \dots & * & * \\ * & * & * & \dots & * & * \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & * & \dots & * & * \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Operazioni elementari

Le operazioni che abbiamo eseguito sul sistema, ossia moltiplicazione e divisione di un'equazione per un numero (diverso da zero), somma e sottrazione di multipli di equazioni oppure scambio di equazioni sono equivalenti alle seguenti operazioni applicate alla matrice del sistema:

- moltiplicazione (divisione) di una riga per un numero (diverso da zero);
- somma (sottrazione) di un multiplo di una riga da un'altra;
- scambio di righe.

Tali operazioni dovranno essere effettuate anche sul vettore dei termini noti affinché il sistema risultante sia equivalente a quello iniziale. Sono dette *operazioni elementari* applicate alle righe.

Esempio

(Unica soluzione)

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrrl}
3 & -3 & 1 & 1 & \\
-1 & 1 & 2 & 2 & \\
2 & 1 & -3 & 0 & \\
\hline
1 & -1 & 1/3 & 1/3 & (R_1/3) \\
-1 & 1 & 2 & 2 & \\
2 & 1 & -3 & 0 & \\
\hline
1 & -1 & 1/3 & 1/3 & \\
0 & 0 & 7/3 & 7/3 & (R_2 + R_1) \\
0 & 3 & -11/3 & -2/3 & (R_3 - 2R_1) \\
\hline
1 & -1 & 1/3 & 1/3 & \\
0 & 3 & -11/3 & -2/3 & (R_2 \leftrightarrows R_3) \\
0 & 0 & 7/3 & 7/3 &
\end{array}$$

Esempio

(Continuazione)

$$\begin{array}{cccccl} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 & \\ 0 & 1 & -11/9 & -2/9 & (R_2/3) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (3R_3/7) \end{array}$$

Da cui

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 - \dfrac{11}{9}x_3 = -\dfrac{2}{9} \Rightarrow x_2 - \dfrac{11}{9} = -\dfrac{2}{9} \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + \dfrac{1}{3}x_3 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x_1 - 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

Ossia la soluzione è

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$$

ed è unica.

Esempio

(Infinite soluzioni)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = & 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 & = & 15 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -1 & 4 & \\ 2 & -1 & 3 & 7 & \\ 4 & 1 & 1 & 15 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & 4 & \\ 0 & -3 & 5 & -1 & (R_2 - 2R_1) \\ 0 & -3 & 5 & -1 & (R_3 - 4R_1) \\ \hline 1 & 1 & -1 & 4 & \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 & (R_2/(-3)) \\ 0 & -3 & 5 & -1 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & 4 & \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (R_3 + 3R_2) \end{array}$$

(Attenzione: due righe uguali!)

Esempio

(Continuazione) Il procedimento è terminato con il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = & 4 \\ \quad x_2 - \dfrac{5}{3}x_3 & = & \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

che ha solo due equazioni in tre incognite x_1, x_2, x_3. In questo caso esistono *infinite soluzioni*. Infatti una delle tre incognite può assumere un qualunque valore e da questo è sempre possibile ricavare il valore delle altre due. La forma usata per esprimere le soluzioni in questo caso è del tipo

$$\begin{cases} x_3 = s \\ x_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{3}s \\ x_1 = 4 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3}s + s = \dfrac{11}{3} - \dfrac{2}{3}s \end{cases}$$

al variare di s numero reale ($s \in \mathbb{R}$).

Esempio

(Nessuna soluzione)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = & -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 & = & -8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -1 & -3 & \\ 2 & 2 & 1 & 0 & \\ 5 & 5 & -3 & -8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -1 & -3 & \\ 0 & 0 & 3 & 6 & (R_2 - 2R_1) \\ 0 & 0 & 2 & 7 & (R_3 - 5R_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -1 & -3 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & (R_2/3) \\ 0 & 0 & 2 & 7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -1 & -3 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & (R_3 - 2R_2) \end{array}$$

Esempio

(Continuazione)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & -3 & & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & (R_3/3) \end{array}$$

Bisogna fare attenzione al fatto che solo il termine noto è non nullo nell'ultima riga della tabella finale.
Il sistema in questo caso non ha soluzioni, infatti l'ultima equazione corrisponde a

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

che non può mai essere verificata per nessun valore di x_1, x_2, x_3.

Matrice ampliata e forma ridotta

Dato un sistema lineare $Ax = b$, con A matrice $m \times n$ consideriamo la matrice $\hat{A} = (A|b)$ di tipo $m \times (n+1)$, detta *matrice ampliata* o *matrice completa* del sistema lineare, ottenuta considerando le n colonne di A e come ultima colonna il vettore b

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (A|b)$$

Nell'applicare il metodo di eliminazione di Gauss abbiamo trasformato, tramite operazioni elementari, tale matrice in una *forma ridotta* avente elementi tutti nulli sotto la diagonale principale ed elementi uguali a 1 o a 0 sulla diagonale principale.

Per tale forma ridotta (ossia la forma finale della tabella dopo l'eliminazione di Gauss) vale la seguente regola generale.

Proposizione (Regola generale)

1. Non esistono soluzioni *se, dopo aver applicato il metodo di eliminazione di Gauss, l'ultima riga non nulla ha un valore uguale a* 1 *come ultimo elemento a destra e* 0 *altrove.*
2. Esiste un'unica soluzione *se, dopo aver applicato il metodo di eliminazione di Gauss, ci sono esattamente* n righe non nulle, *l'ultima delle quali ha* 1 *come penultimo elemento a destra.*
3. Esistono infinite soluzioni *se, dopo aver applicato il metodo di eliminazione di Gauss,* le righe non nulle sono meno di n, *e non è verificata la condizione 1.*

Esempio

(Sistemi lineari con parametri) Determiniamo i valori di c per i quali il sistema

$$\begin{cases} x + y & = & c \\ 3x - cy & = & 2 \end{cases}$$

ammette soluzioni.

$$\begin{array}{cccl} 1 & 1 & c & \\ 3 & -c & 2 & \\ \hline 1 & 1 & c & \\ 0 & -c-3 & 2-3c & (R_2 - 3R_1) \\ \hline 1 & 1 & c & \\ 0 & 1 & \dfrac{2-3c}{-c-3} & (R_2/(-c-3)\ ,\ c \neq -3) \\ \hline \end{array}$$

Esempio

L'ultimo passaggio può essere effettuato solo se $-c-3 \neq 0$, ossia $c \neq -3$. In tal caso abbiamo l'unica soluzione

$$y = \frac{3c-2}{c+3}, \quad x = c - y = c - \frac{3c-2}{c+3} = \frac{c^2+2}{c+3}.$$

Altrimenti se $c = -3$ otteniamo

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & \\ 0 & 0 & 11 & (R_2 - 3R_1) \end{array}$$

ossia un sistema inconsistente che non ha alcuna soluzione. Non esiste alcun valore di c per il quale il sistema ha infinite soluzioni.

Esercizi

Esercizio

Utilizzare il metodo di eliminazione di Gauss sul sistema e sulla corrispondente rappresentazione matriciale nei seguenti casi, al fine di calcolare la soluzione.

- $$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 2 \\ 2x+y & = & 1 \end{array}\right.$$

- $$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 0 \\ x-y & = & 5 \end{array}\right.$$

- $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 & = & 2 \\ 2x_1+x_2-2x_3 & = & 0 \\ -x_1-2x_2+3x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

Esercizio

(Continuazione)

- $$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 & = & 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & -2 \end{cases}$$