Insiemi Numerici

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Insiemi, sottoinsiemi, operazioni

Nel linguaggio corrente usiamo la parola "insieme" per denotare una certa entità composta di oggetti elementari.
Gli oggetti che costituiscono un insieme sono detti i suoi *elementi*. Indicheremo solitamente gli insiemi con lettere maiuscole, $A,\ B,\ C,\ X, ...$, mentre con lettere minuscole $a,\ b,\ c,\ x$, ..., denoteremo gli elementi che fanno parte di questi insiemi.
Un insieme è definito assegnando i suoi elementi, tutti distinti l'uno dall'altro, che si dicono *appartenenti* all'insieme. Se a è un elemento di A, si scrive

$$a \in A,$$

e si legge "a appartiene all'insieme A", mentre se a non è un elemento di A, si scrive

$$a \notin A.$$

Un insieme particolare è l'insieme privo di elementi, detto *insieme vuoto* e si indica con il simbolo $\emptyset$.
Il modo più semplice per elencare tutti gli elementi di un insieme consiste nel racchiuderli tra parentesi graffe. Per esempio l'insieme A dei nomi degli autori dei testi consigliati per il corso si può indicare con

$$A = \{ \; Lorenzo, \;\; Giacomo, \;\; Giovanni \; \}$$

oppure l'insieme X dei numeri naturali tra 0 e 4 si scrive

$$X = \{ \; 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4 \; \}.$$

Si noti che l'ordine in cui sono elencati gli elementi non è essenziale.
Naturalmente, vi sono casi in cui un insieme non può essere descritto completamente tramite l'elenco esplicito dei suoi elementi. Per esempio, se vogliamo indicare l'insieme dei numeri interi naturali non possiamo certamente scriverli tutti. In casi di questo tipo si ricorre spesso a simboli particolari, per indicare l'insieme dei numeri naturali si usa il simbolo $\mathbb{N}$. Possiamo quindi scrivere

$$\mathbb{N} = \{ \; 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \; \dots \; \}.$$

Un modo differente per descrivere un insieme, a volte l'unico praticabile, consiste nel considerarlo come collezione di tutti gli elementi che appartengono a un certo insieme più grande E, per i quali vale una certa proprietà $\mathcal{P}$. Si scrive allora

$$\{\ x : \ x \in E \ \ e \ \ x \ \ verifica \ \ \mathcal{P}\ \},$$

e si legge "l'insieme degli x tali che x appartiene a E e vale $\mathcal{P}$". In alternativa si può utilizzare la scrittura più concisa

$$\{\ x \in E \ : \ x \ \ verifica \ \ \mathcal{P}\ \}.$$

Per esempio

$$A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} \ = \ \{\ x \ : \ x \in \mathbb{N} \ \ e \ \ x < 5\ \}.$$

Si noti che non è essenziale la lettera che si sceglie per indicare la variabile (la x nell'esempio appena fatto), che viene anche chiamata *variabile muta*.

Sottoinsiemi

Esempio

Abbiamo utilizzato la relazione di uguaglianza tra due insiemi. Dati due insiemi A e B, si dice che A è uguale a B, e si scrive $A = B$, quando A e B hanno gli stessi elementi (cioè A e B sono lo stesso insieme). Si dice invece che A è un *sottoinsieme* di B (oppure che A è incluso in B oppure che B include A) e si scrive

$$A \subseteq B,$$

se ogni elemento di A è anche elemento di B. Se inoltre esiste uno o più elementi di B che non appartengono ad A, si dice che A è incluso strettamente in B (oppure che B include strettamente A) e si scrive $A \subset B$.
Per esempio

$$\{x \in \mathbb{N} \ : \ x \ \ pari \ \} \subseteq \mathbb{N}, \quad \{0, 2\} \subset \{0, 2, 4, 6\}.$$

Si conviene di assumere che ogni insieme abbia l'insieme vuoto come suo sottoinsieme. Ogni insieme A non vuoto ha due sottoinsiemi detti *impropri*: A stesso e $\varnothing$. Gli altri sottoinsiemi sono detti *propri*. ■

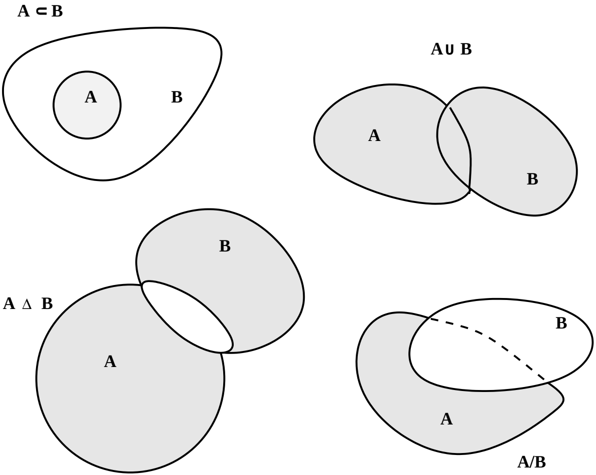
Unione, intersezione e altro

Non esiste l'insieme di tutti gli insiemi, per evitare insidiosi paradossi è opportuno riferirsi a un insieme non vuoto da considerarsi come un insieme ambiente e considerare solo sottoinsiemi di questo insieme "universo". Dati due insiemi A e B, si definiscono i seguenti insiemi.

- *Insieme unione*, $A \cup B$, è l'insieme degli x che appartengono ad A oppure appartengono a B.
- *Insieme intersezione*, $A \cap B$, è l'insieme degli x che appartengono sia ad A che a B.
- *Insieme differenza*, $A \setminus B$, è l'insieme degli x che appartengono ad A ma non appartengono a B.
- *Insieme differenza simmetrica*, $A \triangle B$, è l'insieme degli x che appartengono ad A ma non a B, oppure appartengono a B ma non ad A.
- Per $A \subseteq X$, *insieme complementare*, di A rispetto a X, $\overline{A}$, è l'insieme degli x che appartengono a X ma non appartengono ad A.

Diagrammi di Eulero-Venn

Un diagramma di Eulero-Venn rappresenta gli insiemi come insiemi di punti del piano, una sorta di "patate bidimensionali". Nella Figura si mostra l'interpretazione grafica delle operazioni insiemistiche descritte e dei nuovi insiemi generati.



Esempio

(Insieme delle parti) L'insieme dei sottoinsiemi di un dato insieme A si chiama *insieme delle parti* e si indica con $\mathcal{P}(A)$. Se, per esempio, $A = \{1, 2, 3\}$, l'insieme potenza $\mathcal{P}(A)$ risulta essere

$$\mathcal{P}(A) = \{\ \varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\ \}$$

e possiede otto elementi. Quanti elementi ha $\mathcal{P}(A)$ nel caso in cui A ha n elementi? Consideriamo l'insieme $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ e prendiamo un suo sottoinsieme $S = \{a, b, d\}$. Come possiamo identificare S? Ordiniamo gli elementi di A e assegnamo 1 se l'elemento è nel sottoinsieme, 0 se non c'è,

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a \in S & b \in S & c \notin S & d \in S \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Il numero binario (composto quindi da sole cifre 1 e 0) $n_S = 1101$ caratterizza S. Il numero di possibili numeri binari che possiamo avere con 4 cifre è $2^4 = 16$. In generale, se gli elementi di un inseme A sono n, il numero dei suoi sottoinsiemi (compresi $\varnothing$ e A) sono 2^n. ■

Esempio

(Prodotto Cartesiano) Dati due insiemi A e B possiamo prendere $a \in A$, $b \in B$ e considerare la coppia ordinata (a, b), in cui a è il primo elemento mentre b è il secondo elemento. Due coppie ordinate saranno uguali quando hanno ordinatamente uguali primo e secondo elemento.
Si dice *prodotto cartesiano* di A e B e si indica con $A \times B$, l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A,\ b \in B$. Possiamo generalizzare la costruzione del prodotto cartesiano al caso di tre o più insiemi. In generale il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ di n insiemi $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ é costituito dalle $n-$ple ordinate di elementi $(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$.
Nel caso in cui tutti gli insiemi siano uguali all'insieme A il prodotto cartesiano è indicato con A^n.
Per esempio, consideriamo gli insiemi $A = \{p, a, x\}$ e $B = \{1, 2\}$, il prodotto cartesiano $A \times B$ risulta costituito da

$$A \times B = \{(p, 1),\ (p, 2),\ (a, 1),\ (a, 2),\ (x, 1),\ (x, 2)\ \},$$

mentre il prodotto cartesiano $B \times A$,

$$B \times A = \{(1, p),\ (1, a),\ (1, x),\ (2, p),\ (2, a),\ (2, x)\ \}.$$

In generale quindi $A \times B \neq B \times A$. ■

Proposizione (Proprietà insiemi)

Siano A, B, C *tre sottoinsiemi nel medesimo insieme ambiente* S, *allora*

i) *proprietà Booleane,*

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = S;$$

ii) *proprietà associativa, commutativa, distributiva,*

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ A \cap B &= B \cap A, & A \cup B &= B \cup A, \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C), & (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C); \end{aligned}$$

iii) *leggi di De Morgan,*

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Insiemi numerici

Abbiamo già accennato all'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, indicheremo con $\mathbb{N}^*$ l'insieme dei numeri naturali diversi da zero, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Un numero naturale n può essere espresso in una base $\beta > 1,\ \beta \in \mathbb{N}^*$ nella forma

$$n = c_k\beta^k + c_{k-1}\beta^{k-1} + ... + c_1\beta + c_0,$$

dove c_i sono interi compresi tra 0 e $\beta - 1$, l'indice i sta ad indicare la posizione (la rappresentazione sarà unica se supponiamo $c_k \neq 0$). La base usualmente adottata è la base $\beta = 10$ e le cifre $c_i,\ i = 0, ..., k$ sono dette cifre decimali.
I numeri naturali possono essere rappresentati geometricamente come punti su una retta. A tale scopo si fissa un punto O sulla retta, che assoceremo al numero 0, e un secondo punto P diverso da O, che assoceremo al valore 1. Il verso di percorrenza positivo della retta è quello che porta dal punto O al punto P, mentre la lunghezza del segmento OP, che indicheremo con $\overline{OP}$, viene presa come unità di misura. Riportando i "multipli" del segmento OP sulla retta, secondo il verso positivo, otteniamo i punti associati ai numeri naturali .

Relazione d'ordine

Nell'insieme $\mathbb{N}$ è possibile introdurre una *relazione di ordine*. Se esiste un numero naturale x che sommato ad $a \in \mathbb{N}$ fornisce il numero naturale b, si dice che a è minore o uguale a b e si scrive $a \leq b$ (se $a \leq b$ e $a \neq b$ si scrive $a < b$). Nel caso in cui a è maggiore o uguale a b si potrà scrivere anche $a \geq b$ (e $a > b$ nel caso in cui $a \neq b$).
Sommando e moltiplicando numeri naturali si ottengono numeri naturali ed inoltre i numeri zero ed uno rappresentano l'*elemento neutro* rispettivamente per la somma, $\forall\, a \in \mathbb{N}$, $a + 0 = 0 + a = a$ e il prodotto $\forall\, a \in \mathbb{N}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

I numeri interi

Se tentiamo di invertire l'operazione di somma ci accorgiamo che la cosa non è possibile restando in $\mathbb{N}$. Formalmente, dati $a, b \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$a + x = b,$$

dove x rappresenta l'incognita, può essere priva di soluzione in $\mathbb{N}$. Per far in modo che equazioni di questo tipo abbiano sempre soluzione occorre ampliare l'insieme $\mathbb{N}$, definiamo quindi l'insieme $\mathbb{Z}$ dei *numeri interi*

$$\mathbb{Z} \;=\; \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Anche in $\mathbb{Z}$ sussiste la stessa relazione d'ordine di $\mathbb{N}$, inoltre anche in $\mathbb{Z}$ lo zero si mantiene elemento neutro rispetto alla somma. In particolare la soluzione dell'equazione $a + x = 0$, con $a \in \mathbb{N}$ verrà denotata con $-a$. L'elemento che sommato ad a fornisce zero, quindi l'elemento $-a$, si chiama *opposto* di a. Quindi anche gli interi si possono rappresentare in una opportuna base $\beta > 1$, a differenza degli interi naturali occorre aggiungere eventualmente il segno meno.

Proprietá

Anche gli elementi di $\mathbb{Z}$ si possono rappresentare su una retta, i valori positivi saranno rappresentati come i numeri naturali mentre i valori negativi, cioè $a \in \mathbb{Z}$ e $a < 0$, saranno rappresentati muovendosi nella direzione negativa della retta e muovendosi con passo uguale alla lunghezza del segmento OP preso come unità di misura.

Le proprietà principali delle operazioni aritmetiche in $\mathbb{Z}$ (e negli insiemi numerici che considereremo in seguito) sono elencate di seguito

1) $\forall\, a, b, c, \quad (a+b)+c = a+(b+c)$, (proprietà associativa della somma);
2) $\forall\, a, b, \quad a+b = b+a$, (proprietà commutativa della somma);
3) $\forall\, a, b, c, \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, (proprietà distributiva);
4) $\forall\, a, b, c, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, (proprietà associativa del prodotto);
5) $\forall\, a, b, \quad a \cdot b = b \cdot a$, (proprietà commutativa del prodotto).

I numeri razionali

Nel seguito, per semplicità di notazione la moltiplicazione tra due numeri $a \cdot b$ sarà indicata semplicemente come ab. Proviamo ora a invertire l'operazione di moltiplicazione in $\mathbb{Z}$. Consideriamo per $a, b \in \mathbb{Z}$ l'equazione

$$ax = b,$$

con $a \neq 0$ e x incognita da determinare. Sappiamo che questa equazione ha soluzione in $\mathbb{Z}$ se e solo se b è un multiplo intero di a. Per rendere sempre risolvibile questa equazione dobbiamo ancora ampliare l'insieme in cui lavorare. Si definisce l'insieme dei *numeri razionali* e si indica con $\mathbb{Q}$ l'insieme delle coppie (p, q) con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. La coppia si indica come una frazione p/q e le operazioni aritmetiche vanno tradotte come operazioni tra coppie (tra frazioni). Il numero p si dice numeratore mentre il numero q si dice denominatore.

Osservazione

Per evitare che i numeri razionali non siano univocamente determinati, si considerano equivalenti due numeri razionali p/q e p'/q' se $pq' = p'q$, ovverosia $pq' - p'q = 0$. Operativamente considereremo i numeri razionali $m/n \in \mathbb{Q}$ come frazioni ridotte ai minimi termini, ossia m ed n non hanno fattori comuni. ■

Per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ esiste quindi un elemento, denotato con $1/x \ \in \mathbb{Q}$, tale che $x \cdot (1/x) = 1$. Tale elemento $(1/x)$ si chiama *reciproco* o *inverso* di x. Nella semplificazione ai minimi termini di una frazione il denominatore puó risultare uguale a 1. Per esempio $8/4 = 2/1$. In questo caso potremmo identificare il numero razionale $n/1$ con l'intero n. In questo senso l'insieme $\mathbb{Z}$ è contenuto in $\mathbb{Q}$, così come l'insieme $\mathbb{N}$ è contenuto in $\mathbb{Z}$, in simboli

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Le operazioni tra numeri razionali si definiscono come

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}, \qquad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$

Le proprietà delle operazioni aritmetiche sono le stesse che per $\mathbb{Z}$. Per la relazione d'ordine, sia $x = p/q$ e $y = r/s$, supponiamo inoltre che i denominatori q ed s siano positivi (non è ovviamente limitativo). Rappresentiamo x e y tramite frazioni con il medesimo denominatore, $x = ps/qs, \ \ y = qr/qs$ a questo punto $x \leq y$ significa $ps \leq qr$. Per esempio $2/3 \leq 4/5$, perché $2 \cdot 5 = 10 \leq 3 \cdot 4 = 12$. Le definizioni per $<, \ \geq, \ >$ si affrontano in modo analogo.

Esempio

(Rappresentazione decimale dei numeri razionali) Un numero razionale x ammette una rappresentazione decimale, ci limitiamo alla base $\beta = 10$, della forma

$$x = \pm \left(c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + c_1 10 + c_0 + c_{-1} 10^{-1} + c_{-2} 10^{-2} ... \right)$$

che può essere riscritta come $x = \pm c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0 . c_{-1} c_{-2} ...$ Per esempio

$$\frac{2}{5} = 0.4, \quad \frac{1}{16} = 0.0625, \quad \frac{1}{6} = 0.1666..., \quad \frac{5}{11} = 0.454545...$$

dove i puntini indicano che le cifre continuano indefinitivamente. Quando nella rappresentazione decimale di un numero razionale abbiamo infinite cifre decimali, c'è un gruppo di cifre che si ripete: tale gruppo costituisce il *periodo* della rappresentazione. Di solito si evidenzia tale gruppo sopralineando le cifre che lo costituiscono,

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}, \quad \frac{5}{11} = 0.\overline{45} \quad .$$

Si può dimostrare che ogni rappresentazione decimale di un numero razionale è periodica nel senso ora descritto, viceversa a ogni rappresentazione periodica si può associare una frazione che lo genera. ■

Numeri non razionali

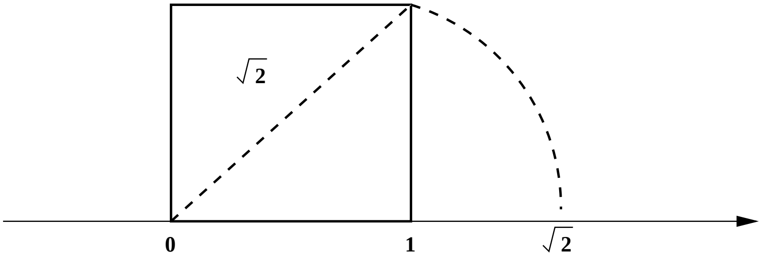


Figura: La diagonale di un quadrato unitario è incommensurabile rispetto al lato.

Consideriamo un quadrato di lato unitario (vedi Figura) e consideriamo la misura della diagonale. Indicando con x la lunghezza di tale diagonale, dal Teorema di Pitagora si ottiene

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Vale la seguente

Proposizione

Se il numero x soddisfa $x^2 = 2$ allora x non è un numero razionale.

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, supponiamo che $x = p/q \in \mathbb{Q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e p, q privi di fattori comuni. Elevando al quadrato x si ottiene

$$x^2 = x \cdot x = \frac{p^2}{q^2}.$$

Segue che $p^2 = 2q^2$, quindi p^2 è un numero pari, da cui si deduce che anche p è un numero pari. Pertanto $p = 2k$, per un certo intero positivo k. Ne segue che $p^2 = 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$. Quindi anche q^2 è un numero pari, ne segue che anche q è un numero pari. Siamo arrivati a dedurre che sia p che q sono numeri pari ed hanno quindi un fattore in comune, il numero 2, contraddicendo l'ipotesi che la frazione era ridotta ai minimi termini. L'assurdo è nato dall'aver supposto x razionale. ∎

Numeri reali

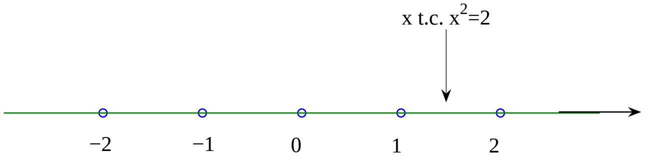


Figura: La retta dei numeri reali.

Estendiamo quindi l'insieme dei numeri razionali in modo da avere una corrispondenza biunivoca con la retta. L'insieme numerico che si ottiene è l'insieme dei *numeri reali* indicato con $\mathbb{R}$. Dal punto di vista della rappresentazione decimale, i numeri reali possono dar luogo a qualsiasi allineamento di cifre dopo la virgola. Allineamenti finiti o periodici fanno ritrovare, dal punto di vista insiemistico, i numeri razionali. Rappresentazioni decimali illimitate e non periodiche danno luogo a numeri reali non razionali: i *numeri irrazionali*. Per esempio la lunghezza della diagonale del quadrato unitario è un numero irrazionale x che verifica $x^2 = 2$ e che indicheremo con $\sqrt{2}$ le cui prime cifre sono

$$x = \sqrt{2} = 1.41421356237310\ldots$$

Esempio

(Numeri reali e numeri razionali) Ogni numero reale può essere approssimato con numeri razionali. Se fissiamo una tolleranza t e se $x \in \mathbb{R}$ possiamo trovare un numero $y \in \mathbb{Q}$ tale che sia vicino a x a meno di t.
Siano x un numero irrazionale, quindi $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, e $n \in \mathbb{N}^*$. Allora esiste un numero razionale $y = m/n$ con denominatore n tale che

$$-\frac{1}{2n} < \ x - \frac{m}{n} \ < \frac{1}{2n}.$$

Stiamo dando per scontato che non ci siano problemi a estendere operazioni aritmetiche e relazioni d'ordine anche all'insieme dei numeri reali.
Facciamo un esempio, sia $x = \sqrt{2}$ e $n = 27$, consideriamo lo sviluppo approssimato di $27 \cdot \sqrt{2} = 27 \cdot 1.41421... \approx 38.1836...$, il numero intero che più si avvicina a quest'ultimo valore è $m = 38$. Dalle scelte fatte si ottiene

$$-\frac{1}{2} < \ 27 \cdot \sqrt{2} - 38 \ < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 27} < \ \sqrt{2} - \frac{38}{27} \ < \frac{1}{2 \cdot 27}.$$

Si possono, comunque, ottenere approssimazioni migliori. ■

Osservazione

I problemi relativi alle relazioni tra i diversi insiemi numerici hanno un risvolto applicativo estremamente attuale. Fatte le dovute semplificazioni, ogni calcolatrice tascabile è in grado infatti di gestire solo numeri aventi una rappresentazione decimale limitata (numeri macchina). Ne deriva che si commettono sempre errori di calcolo usando una calcolatrice numerica. Consideriamo il semplice calcolo

$$500\left(\frac{1}{1500}+\frac{2}{1500}\right)=1.$$

I numeri razionali $1/1500$ e $2/1500$ hanno i valori numerici decimali $0.000666\ldots$ e $0.001333\ldots$ e non possono essere rappresentati con un numero finito di cifre decimali, mentre il risultato 1 chiaramente sì. Se avessimo una calcolatrice basata solo su tre cifre decimali nell'eseguire il calcolo otteniamo

$$500(0.000+0.001)=0.5.$$

Ossia un'errore del 50%. ■

Proprietá

Riassumiamo le proprietà più importanti dell'insieme dei numeri reali.

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, questo dal punto di vista insiemistico.
- Le operazioni aritmetiche, con le loro proprietà, definite sui razionali si estendono ai reali.
- La relazione d'ordine $x \leq y$ dei numeri razionali si estende ai reali con analoghe proprietà. Definendo con $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$ i sottoinsiemi dei numeri reali positivi e, rispettivamente, negativi, abbiamo $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-$. Formalmente potremmo scrivere

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \quad x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+.$$

  L'ordinamento è totale nel senso che per ogni coppia $x, y \in \mathbb{R}$ vale una e una sola delle alternative $x < y$, $x = y$, $y < x$. Anziché scrivere $x \in \mathbb{R}_+$ si può scrivere $x > 0$, per $x \in \mathbb{R}_-$ si può invece abbreviare con $x < 0$.

Altre proprietà della relazione d'ordine (qui riportate nel caso $<$ ma analoghe al caso con $\leq$)

1) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, $x < y \ \Rightarrow \ x + z < y + z$;
2) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, $x < y,\ z > 0 \ \Rightarrow \ x \cdot z < y \cdot z$;
2) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, $x < y,\ z < 0 \ \Rightarrow \ x \cdot z > y \cdot z$;
4) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y \ \Rightarrow \ 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

I numeri razionali sono densi nei reali. Questo significa quanto già osservato: un numero reale può essere approssimato bene quanto vogliamo da un numero razionale. Ciò implica che tra due numeri reali qualunque esistono infiniti razionali.

L'insieme dei numeri reali è completo. Questa proprietà traduce il fatto che a ogni punto della retta reale può essere associato uno e un solo numero reale. In altri termini, se disponiamo tutti i numeri reali seguendo la relazione d'ordine su una retta reale non lasciamo "buchi". La stessa ipotetica operazione con i razionali fornirebbe invece una retta piena di buchi, per esempio per $x = \sqrt{2}$ se ne incontrerebbe uno.

Esercizi

Esercizio

Si considerino gli insiemi

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Calcolare $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cup A$, $B \cup C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $(A \cup B) \cap C$. *Si calcoli infine* $A \times B$ e $B \times C$.

Esercizio

Per ognuno dei seguenti valori reali stabilire se appartiene all'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ *o all'insieme dei numeri irrazionali* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$(i) \;\; 2\sqrt{2}, \quad (ii) \;\; 2 - \sqrt{2},$$

$$(iii) \;\; r_1, \; r_2, \; r_1 \times r_2, \; r_1 + r_2, \quad r_1, \; r_2 \;\; \text{soluzioni} \;\; \text{di} \;\; x^2 - 6x + 6 = 0.$$

Esercizio

Dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \; 2 \leq x < 7\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \; 3 \leq x \leq 5\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \; 3 < x < 6\}, \quad D = \{3, \; 5, \; 7, \; 9, \; 11\},$$

stabilire se sono vere le seguenti relazioni

$$(i) \;\; B \subseteq A, \quad (ii) \;\; C \in A, \quad (iii) \;\; (A \cap B) \subseteq C$$

$$(iv) \;\; A \setminus D = \varnothing, \quad (v) \;\; (C \cup D) \subseteq A, \quad (vi) \;\; (B \setminus C) \subseteq D.$$

Esercizio

Convertire i seguenti numeri interi dalla base 10 *alle basi* 2 *e* 5

$$34, \qquad 234, \quad 5647, \qquad 21465.$$