Massimi e minimi

Lorenzo Pareschi

Dipartimento di Matematica & Facoltá di Architettura
Universitá di Ferrara

http://utenti.unife.it/lorenzo.pareschi/
lorenzo.pareschi@unife.it

Importanza della derivata

Una proprietà importante è già stata enunciata, la ricordiamo: se f è derivabile in un punto x_0 allora f è continua nello stesso punto. Vediamo altre conseguenze dirette, tutte a validitá locale (ossia sono tutte proprietà del tipo "esiste un intorno in cui ...")

Definizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$ interno a I, diremo che

a) *f è crescente in x_0 se esiste un intorno di x_0 contenuto in I tale che $f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2)$ per tutti i punti $x_1 < x_0 < x_2$ nell'intorno;*

b) *f è decrescente in x_0 se esiste un intorno di x_0 contenuto in I tale che $f(x_1) \geq f(x_0) \geq f(x_2)$ per tutti i punti $x_1 < x_0 < x_2$ nell'intorno;*

c) *x_0 è un punto di minimo locale se esiste un intorno di x_0 contenuto in I tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per tutti i punti x nell'intorno;*

d) *x_0 è un punto di massimo locale se esiste un intorno di x_0 contenuto in I tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per tutti i punti x nell'intorno.*

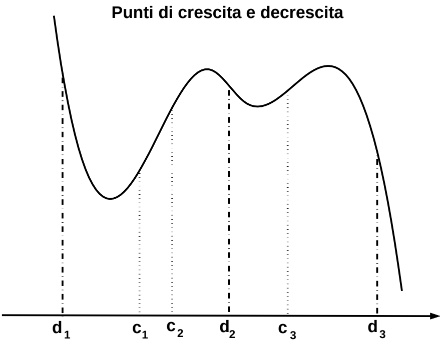


Figura: Punti di crescita $c_1,\ c_2,\ c_3$, decrescita $d_1,\ d_2,\ d_3$, punti di minimo $m_1,\ m_2$, punti di massimo $M_1,\ M_2$.

Si osserva che le proprietà locali non implicano proprietà valide per tutto il dominio. Nella Figura è evidente che il fatto di essere un punto di minimo o massimo o di crescita o di decrescita non implica che in ogni intorno questa proprietà resta.

Teorema (Derivata e proprietà locali)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$ e interno a I, f sia derivabile in x_0, allora

i) *se $f'(x_0) > 0$ (< 0) allora f è crescente (decrescente) in x_0;*

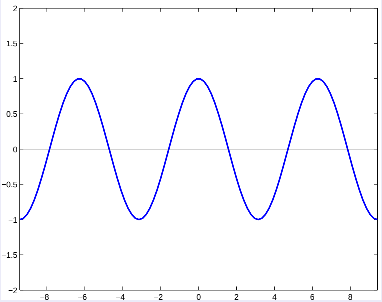
ii) *se f è crescente (dcrescente) in x_0 allora $f'(x_0) \geq 0$ ($f'(x_0) \leq 0$);*

iii) *se x_0 è un punto di minimo o di massimo locale, allora $f'(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si basa sulle proprietà dei limiti, vediamo solo il punto $iii)$ perchè sarà utilizzato nel seguito. Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale (analogamente per il massimo). Per $x > x_0$, x in un opportuno intorno di x_0, si ha $f(x) \geq f(x_0)$ e $(x - x_0) > 0$, quindi $f'_+(x_0) \geq 0$. Per $x < x_0$, nell'intorno di x_0, si ha $f(x) \geq f(x_0)$ e $(x - x_0) < 0$, quindi $f'_-(x_0) \leq 0$. Essendo $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, segue che $f'(x_0) = 0$. ∎

Esempio

La funzione $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ ha punti di massimo locale per $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ e punti di minimo locali per $x = (2k+1)\pi$. In effetti da $\cos' x = -\sin x$, si verifica che in tutti questi punti la derivata si annulla. Inoltre, da $-\sin(\pi/2 + 2k\pi) = -1 < 0$ si deduce che tutti i punti $d_k = (\pi/2 + 2k\pi)$ sono di decrescita, mentre i punti $c_k = (3\pi/2 + 2k\pi)$ sono punti di crescita.



Il fatto che $f'(x_0) = 0$ non implica nulla sul comportamento di una funzione in x_0. Le funzioni $x^2,\ -x^2,\ x^3,\ -x^3$ hanno tutte derivata nulla in $x = 0$ ma in tale punto hanno, rispettivamente, un minimo locale, un massimo locale, un punto di crescita, un punto di decrescita.

Osservazione

(Massimi e minimi) Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, e f sia continua in I. Per trovare eventuali punti di minimo o di massimo locale (o assoluti) dobbiamo controllare tre categorie di punti,

- estremi dell'intervallo I se questi vi appartengono;
- punti di I in cui f non è derivabile;
- punti stazionari interni, cioè punti in cui $f'(x_0) = 0$.

Per esempio la funzione $f(x),\ x \in (0,1)$, è derivabile ovunque e $f'(x) = 1 \neq 0$, gli estremi dell'intervallo non appartengono al dominio, questa funzione non ha nè massimo nè minimo in $(0,1)$. La funzione $f(x) = |x|,\ x \in [-4,5]$, ha un punto di minimo (assoluto) in $x = 0$ dove non è derivabile, ha due punti di massimo in $x = -4$ e $x = 5$, estremi dell'intervallo di definizione.
Per la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2,\ x \in [-2,3]$ i candidati, per essere un minimo o un massimo, sono gli estremi $x_0 = -2$, $x_1 = 3$ ed i punti dove si annulla la derivata

$$f'(x) = 0 \Rightarrow\ 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_2 = 0,\ x_3 = 2.$$

Proprietà globali

Consideriamo alcune proprietà globali del grafico di una funzione, qui il termine globali vuol dire che desideriamo studiare proprietà che valgono non in un opportuno intorno ma in un dato intervallo o, addirittura, in tutto il dominio. Consideriamo il grafico di una funzione f derivabile in un dato intervallo I,

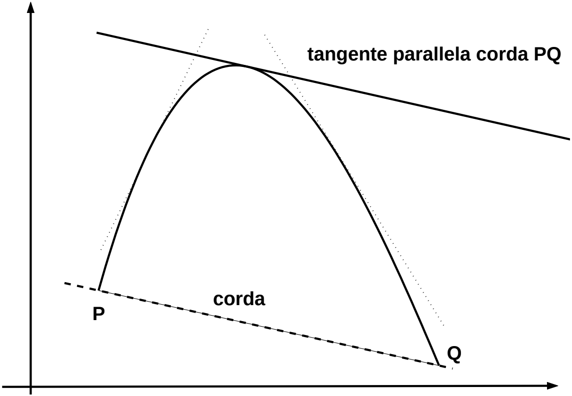


Figura: Tangente parallela alla corda PQ.

Teorema (Teorema di Rolle)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e tale che

- f *è continua in* $[a, b]$;
- f *è derivabile in* (a, b);
- $f(a) = f(b)$;

allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ *tale che* $f'(c) = 0$.

Esempio

(Numero di radici) Con il Teorema di Rolle dimostriamo che la funzione $f(x) = x^3 + x - 1$ ha un'unica radice reale. Infatti dal fatto che f è continua e che $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, dal Teorema degli zeri si deduce che esiste almeno una radice nell'intervallo $(0, 1)$. Supponiamo che esistano due zeri, $z_1, \ z_2$ in tale intervallo, $f(z_1) = f(z_2) = 0$, applicando il Teorema di Rolle per la restrizione della f nell'intervallo di estremi z_1 e z_2 conseguirebbe che esiste un punto $\overline{x}$ tale che $f'(\overline{x}) = 0$. Ma

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

quindi questo non può avvenire e la radice reale è unica.

Veniamo al risultato centrale di tutto il paragrafo, questo risultato ci permette di "controllare" l'incremento di una funzione f dalle informazioni sulla sua derivata.

Teorema (Teorema di Lagrange o del valor medio)

Sia $: [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione definita nell'intervallo chiuso* $[a, b]$ *e tale che*

- f *è continua in* $[a, b]$*;*
- f *è derivabile in* (a, b)*;*

allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ *tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Osservazione

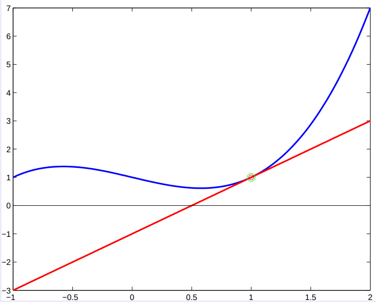
Il Teorema di Rolle é in effetti un caso particolare del Teorema di Lagrange, basta infatti ruotare il grafico per ricondursi dall'uno all'altro. I Teoremi di Rolle e di Lagrange sono teoremi di esistenza: non dicono nulla sull'unicità dei punti scelti, inoltre non forniscono una costruzione del punto c nelle condizioni desiderate.

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - x + 1$ nell'intervallo $[-1, 2]$. La funzione verifica le ipotesi del Teorema di Lagrange, esisterà quindi $c \in (-1, 2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{7 - 1}{3} = 2.$$

Infatti, $f'(x) = 3x^2 - 1$, quindi $f'(x) = 2$ è verificata per $3x^2 - 1 = 2$, da cui $x^2 = 1$. La radice aritmetica (positiva) $c = 1$ soddisfa $f'(c) = 2$, inoltre $1 \in (-1, 2)$.



Teorema (Derivata e monotonia)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua nell'intervallo chiuso* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b)*, allora*

i) *se* $f'(x) > 0, \quad \forall\, x \in (a, b)$ *allora* f *è strettamente crescente in* $[a, b]$*;*

ii) *se* $f'(x) < 0, \quad \forall\, x \in (a, b)$ *allora* f *è strettamente decrescente in* $[a, b]$*;*

iii) *se* $f'(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in (a, b)$ *allora* f *è non decrescente in* $[a, b]$*;*

iv) *se* $f'(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in (a, b)$ *allora* f *è non crescente in* $[a, b]$*.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione dei vari punti è simile, ci limitiamo solo al punto $i)$. Siano $x_1,\ x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, per il Teorema del valor medio applicato alla restrizione di f all'intervallo $[x_1, x_2]$ (valgono tutte le ipotesi anche per la restrizione), si ha

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

per un opportuno $c \in (x_1, x_2)$. Ne segue che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1),$$

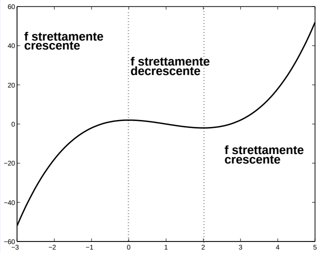
ma $f'(c) > 0$, per ipotesi, e $(x_2 - x_1) > 0$, da cui $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ovverosia $f(x_2) > f(x_1)$. ■

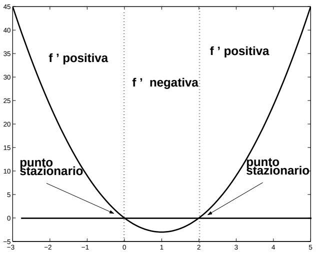
Esempio

Cerchiamo in quali intervalli la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ cresce e in quali decresce. Abbiamo

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2),$$

pertanto $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $x > 2$, $f'(x) < 0$ per $x \in (0,2)$. Segue che la funzione f è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$, mentre è strettamente decrescente nell'intervallo $(0,2)$.





Gli zeri di f' sono $x_1 = 0$ e $x_1 = 2$. In x_1 si passa dalla crescita alla decrescita, sarà quindi un punto di massimo locale, al contrario in x_1 si passa dalla decrescita alla crescita, sarà quindi un punto di minimo locale.

Test della derivata prima

Il segno della derivata prima ci permette di distinguere le zone di crescita e di decrescita della funzione, questo ci permette di avere a disposizione uno strumento importante per la ricerca dei punti di minimo o di massimo.

Teorema (Test della derivata prima)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in (a, b), sia $x_0 \in (a, b)$ un punto stazionario, $f'(x_0) = 0$, oppure un punto singolare, $\nexists f'(x_0)$.

i) *Se f è derivabile negli intervalli (a, x_0) e (x_0, b), e $f'(x) > 0, \; x \in (a, x_0)$, $f'(x) < 0, \; x \in (x_0, b)$, allora f ha un punto di massimo locale in x_0.*

ii) *Se f è derivabile negli intervalli (a, x_0) e (x_0, b), e $f'(x) < 0, \; x \in (a, x_0)$, $f'(x) > 0, \; x \in (x_0, b)$, allora f ha un punto di minimo locale in x_0.*

DIMOSTRAZIONE. Vediamo solo il caso $i)$, l'altro caso è analogo. Se $x \in (a, x_0)$, applicando il Teorema del valor medio nell'intervallo $[x, x_0]$ si ottiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c), \quad x \in (x, x_0).$$

Per ipotesi $f'(c) > 0$, essendo $x - x_0 < 0$ segue che $f(x) < f(x_0)$. In modo simile, per $x > x_0$ si ottiene $f(x) < f(x_0)$, per $x \in (x_0, b)$. Il punto x_0 è un punto di massimo locale. ■

Esempio

Si consideri la funzione $f(x) = xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Abbiamo,

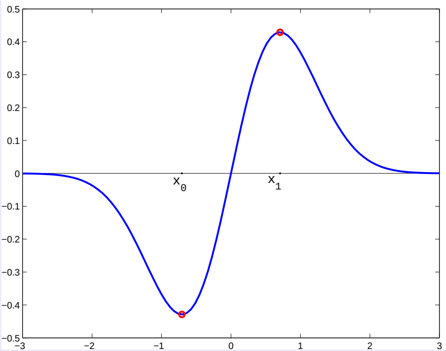
$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Non vi sono punti singolari, la derivata è definita per ogni x reale, i punti stazionari sono invece le radici di $(1 - 2x^2)$, dato che l'esponenziale è sempre positivo. Si hanno quindi due punti stazionari, $x_0 = -1/\sqrt{2}$, $x_1 = 1/\sqrt{2}$. Anche il segno della derivata f' è determinato solo dal fattore $(1 - 2x^2)$ che è l'equazione di una parabola. Si ottiene, $f'(x) > 0$, per $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $f'(x) < 0$, per $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. La situazione relativa al segno della derivata prima e all'andamento di crescita/decrescita della funzione puó essere sintetizzato come

$$\begin{array}{cccccc}
f' & & 0 & & 0 & \\
 & -- & & ++ & & -- \\
\hline
f & & x_0 = -1/\sqrt{2} & & x_1 = 1/\sqrt{2} & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & \text{min} & & \text{max} &
\end{array}$$

Esempio

(continuazione) Il punto x_0 sarà quindi un punto di minimo locale, mentre in x_1 ci sarà un massimo locale. Si noti che la funzione data è una funzione dispari, $f(x) = -f(-x)$, quindi questa simmetria poteva suggerire dall'inizio la posizione del punto di minimo (o di massimo) dalla conoscenza dell'altro punto.

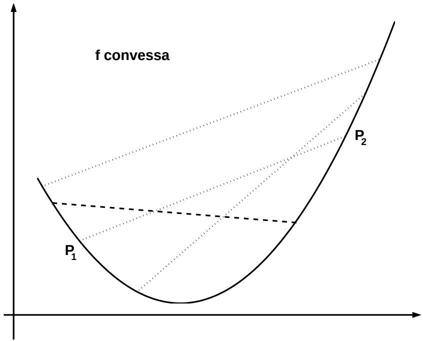


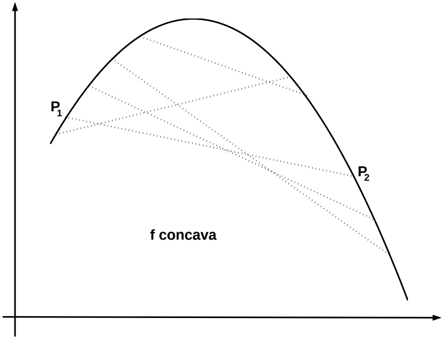
Derivata e convessità

Definizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, la funzione f si dice $convessa$ $(concava)$ se per ogni coppia di punti $x_1 < x_2 \in I$ il segmento di estremi $P_1(x_1, f(x_1))$, $P_2(x_2, f(x_2))$ non sta al di sotto (sopra) del grafico di f per $x \in [x_1, x_2]$.

Una funzione f convessa si dice anche che ha la concavità rivolta verso l'alto, una funzione f concava si dice che ha la concavità rivolta verso il basso.





Dal punto di vista analitico la convessità (concavità) può essere caratterizzata utilizzando la forma parametrica per descrivere i punti di una retta. In particolare i punti (x, y) del piano appartenenti a una retta passante per i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ possono essere descritti come

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1),$$

$$y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Per $t \in (0, 1)$ si individuano punti intermedi del segmento P_1P_2. Possiamo allora caratterizzare la convessità (concavità) richiedendo che per ogni punto di qualsiasi corda del grafico della funzione stiamo sopra o sotto al grafico stesso.

Definizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, se per ogni $x_1 < x_2$ nell'intervallo I e per ogni $t \in (0, 1)$ si ha

i) $f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$ *allora la funzione è convessa;*

ii) $f(x_1 + t(x_2 - x_1)) < f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$ *allora la funzione è strettamente convessa;*

iii) $f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$ *allora la funzione è concava;*

iv) $f(x_1 + t(x_2 - x_1)) > f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$ *allora la funzione è strettamente concava.*

È intuibile che nel caso di funzione derivabile, la retta tangente rimarrà sotto il grafico della funzione f nel caso di convessità, sopra nel caso di concavità.

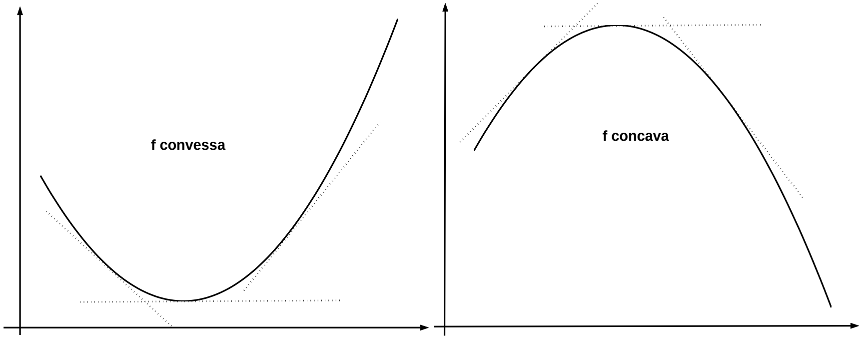


Figura: Tangenti e funzioni convesse o concave.

Nel caso di convessità e derivabilità basta scrivere $t = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$, quando $x_2 \neq x_1$, sostituire nella disuguaglianza della convessità e passare al limite ottenendo

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

dove l'espressione al secondo membro rappresenta l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_1.

Dovrebbe essere intuitivo che la pendenza della retta tangente è una quantità crescente nel caso di convessità e decrescente nel caso di concavità. Queste proprietà si possono dimostrare formalmente e forniscono il seguente risultato.

Teorema (Derivata e convessità)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivabile in tutto l'intervallo (a, b) e continua in tutto il dominio, valgono le proprietà,

i) *f è convessa (concava) in $[a, b]$ se e solo se f' è non decrescente (non crescente) in (a, b);*

ii) *f è convessa (concava) se e solo se*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall\, x, x_0 \in (a, b),$$

(la disuguaglianza è di verso opposto nel caso di concavità).

Esempio

La funzione $f(x) = x^4 + 2$, $x \in \mathbb{R}$ è una funzione convessa (anzi strettamente convessa), infatti $f'(x) = 4x^3$ e tale funzione risulta essere strettamente crescente su tutta la retta reale.
La funzione $f(x) = |x|$ è una funzione convessa ma non possiamo utilizzare le proprietà della derivata perchè in $x = 0$ la funzione non è derivabile. Abbiamo però

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) = |x_1 + t(x_2 - x_1)| = |tx_2 + (1 - t)x_1|,$$

e, per la disuguaglianza triangolare,

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq |tx_2| + |1 - t| \; |x_1| = t|x_2| + (1 - t)|x_1|,$$

essendo $t \in (0, 1)$. Si conclude che

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

e quindi la convessità.

Esempio

(Convessità funzione esponenziale) Dalle formule di derivazione delle funzioni elementari si ha

$$(e^x)' = e^x,$$

quindi, essendo la funzione esponenziale positiva, abbiamo una conferma che è una funzione strettamente crescente. Dal fatto che tale funzione è strettamente crescente discende che è anche una funzione convessa.
Per la funzione logaritmo naturale,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0,$$

quindi la sua derivata prima è sempre positiva e decrescente. Possiamo quindi dedurre che la funzione logaritmo naturale è una funzione strettamente crescente e strettamente concava.

Esempio

(Problema di Didone semplificato) La leggenda narra che la città di Cartagine venne fondata dalla regina Didone. Ella ottenne dagli indigeni del luogo il permesso di occupare tanta terra quanta potesse essere compresa in una pelle di bue. La regina prese alla lettera la concessione e tagliò una pelle di bue in strisce molto strette che legò fra loro per poi abbracciare con esse un territorio piuttosto esteso. Il problema che Didone dovette affrontare è quello di determinare la curva chiusa racchiudente la massima area tra tutte quelle di dato perimetro. In un caso molto semplificato consideriamo il problema di determinare il rettangolo di area massima tra tutti i rettangoli di dato perimetro P. Indicando con x e y la lunghezza dei lati del rettangolo abbiamo,

$$P = 2x + 2y,$$

da cui $y = (P - 2x)/2$. Per l'area A abbiamo dunque

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \frac{(P - 2x)}{2}.$$

Esempio

(Problema di Didone semplificato - continuazione) Ovviamente abbiamo, $x \in (0, P/2)$, e $A(0) = A(P/2) = 0$, $A(x) > 0$ per $x \in (0, P/2)$. Avremo un punto di massimo interno all'intervallo $(0, P/2)$, lo individuiamo tramite il calcolo della derivata prima

$$A'(x) = \frac{1}{2}(P - 4x) \Rightarrow A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{P}{4}.$$

Il punto stazionario $x = P/4$ risulta essere un punto di massimo, inoltre il corrispondente valore di y risulta uguale a $P/4$. Il rettangolo di area massima è un quadrato con lato di lunghezza $P/4$.

Esercizio

Trovare i punti della curva di equazione $y = x^3 - 3x + 5$ *per i quali la retta tangente sia* (a) *parallela alla retta* $y_1 = -2x$; (b) *perpendicolare alla retta di equazione* $y_2 = -x/9$.

Esercizio

Determinare il numero di zeri della funzione

$$f(x) = 1 + x^2 - |x|^a$$

al variare del parametro reale a.

Esercizio

Trovare eventuali punti di minimo e massimo locali per le seguenti funzioni negli intervalli specificati,

$$f_1(x) = x^2 + 1/x \ \ in \ \ [1/2, 2], \ f_2(x) = x^2 e^{-|x|} \ \ in \ \ \mathbb{R},$$

$$f_3(x) = \tfrac{1}{2+x^2} \ \ in \ \ (-2, 2), \ f_4(x) = 2 + |\cos x| \ \ in \ \ [-2\pi, 2\pi].$$

Esercizio

Tra tutte le lattine perfettamente cilindriche (cilindro rettangolo con base circolare) e di assegnato volume V *trovare quelle che minimizzano l'area superficiale.*

Esercizio

(Problema di Ferrari-Tartaglia) *Dividere* $r = 8$ *in due parti* a *e* b *in modo tale che il prodotto* $a \cdot b \cdot (a - b)$ *risulti massimo.*