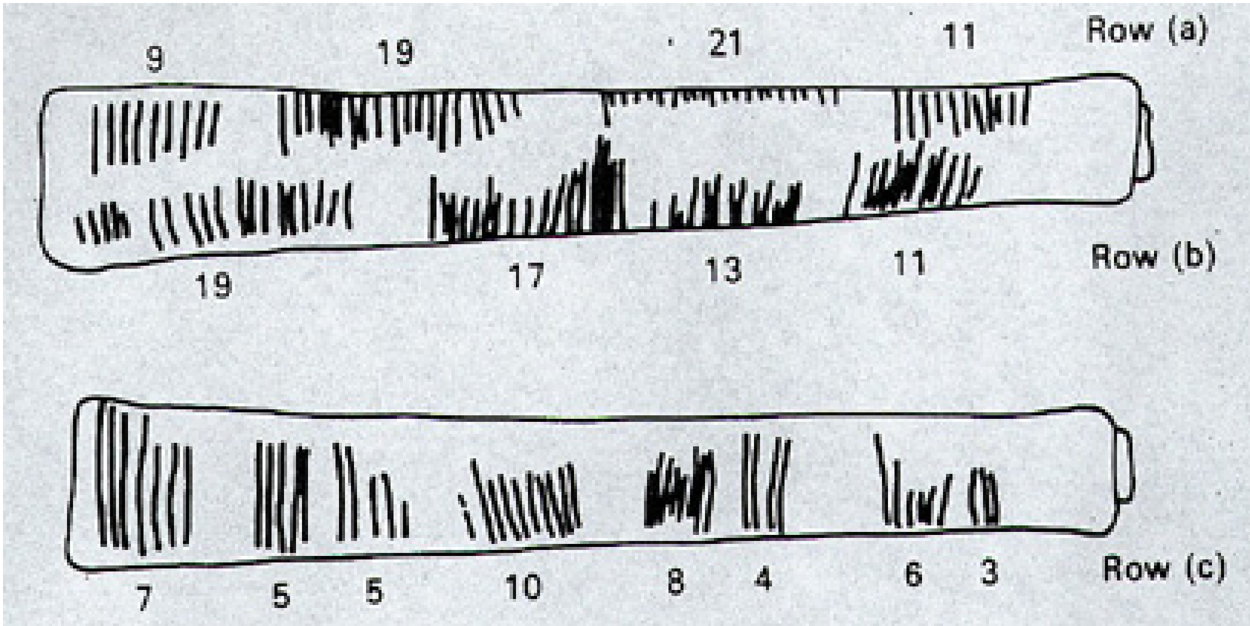
Viaggio intorno ai numeri

Quando apparvero i numeri ed il contare nella storia dell'umanità?

Non lo sappiamo esattamente; Le prime tracce del "contare" risalgono a circa 30.000 anni fa e sono costituite da ossa intagliate, con tacche che si pensa indichino un qualche tipo di conteggio (giorni, animali?).

"The Ishango Bone" (circa 22.000 anni fa)



Schema delle tacche

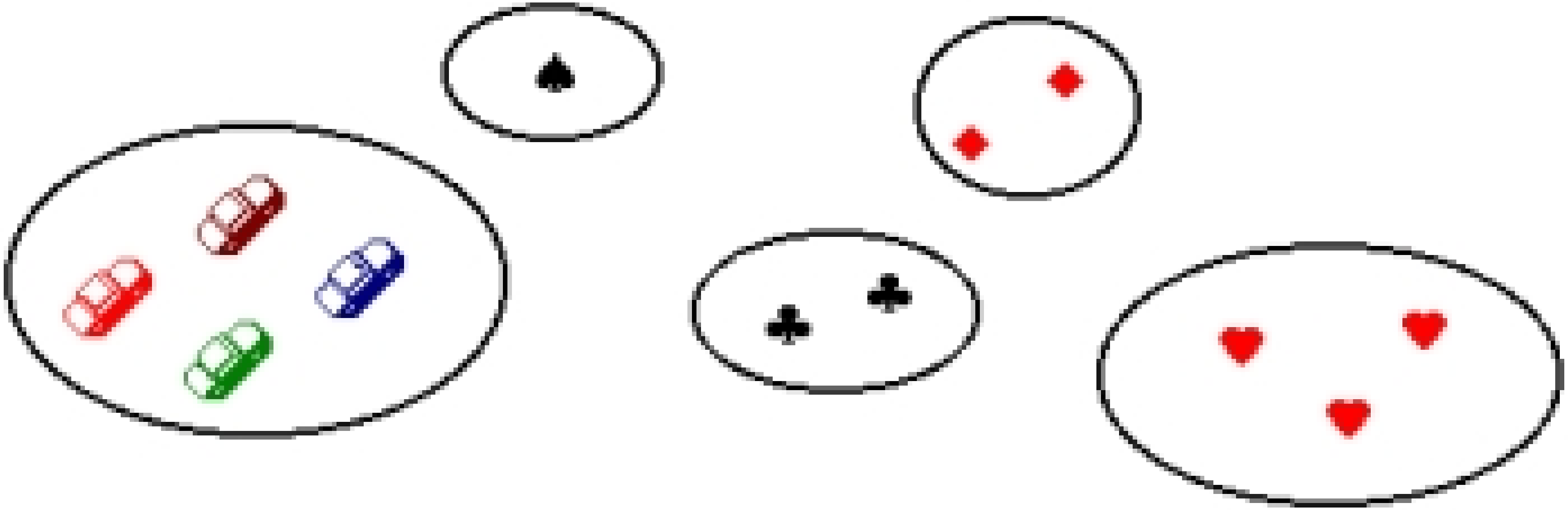
Si potrebbe pensare che l'uso dei numeri sia qualcosa di innato. Che sia un senso della quantità, implicito nella struttura della nostra mente, come la capacità di percepire il caldo e il freddo, o i colori.

Le cose non stanno affatto così: sicuramente c'è stato un periodo in cui

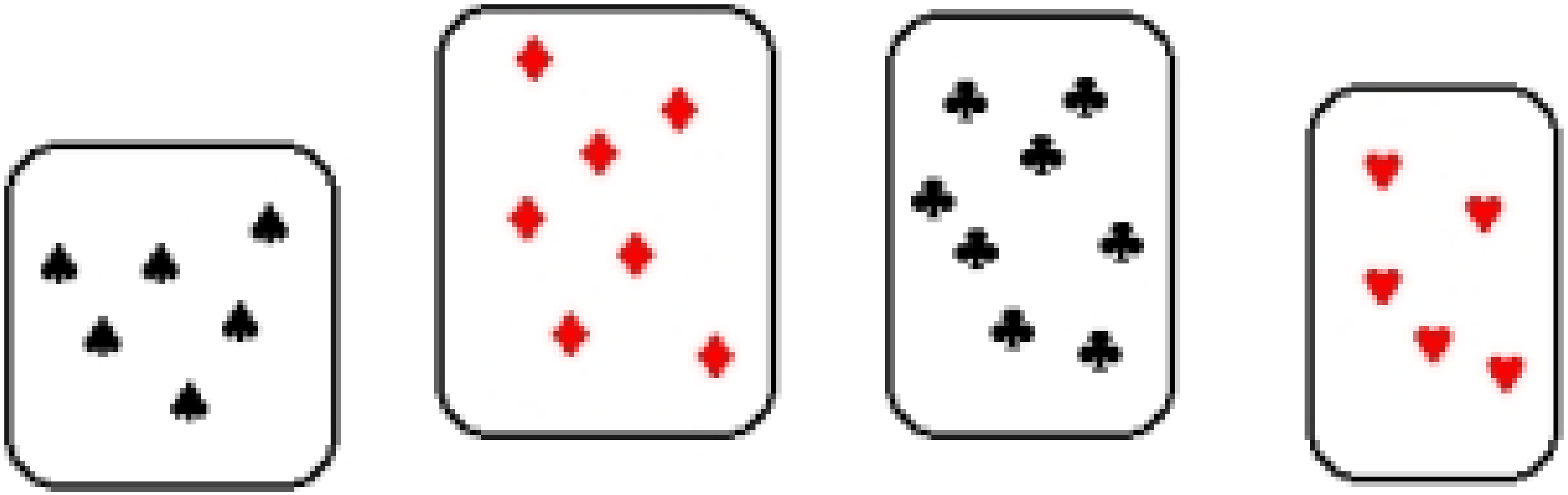
gli esseri umani non avevano né il concetto di numero, né la capacità di contare.

La migliore prova di ciò è che esistono tuttora popolazioni che non hanno sviluppato il concetto di numero, e nei cui linguaggi le parole per la serie dei numeri non esistono: "uno", "due" e "molti" rappresentano ancora le uniche grandezze utilizzate (si tratta, ad esempio, di tribù isolate in Africa, in Oceania od in Amazzonia).

Non è difficile constatare che esiste in ognuno di noi una *percezione diretta* del numero, una capacità immediata di distinguere insiemi con una quantità diversa di elementi, che non è legata al ***contare***.



Potete dire quanti sono gli elementi di ognuno di questi insiemi con una semplice occhiata: la percezione è immediata, non avete bisogno di contare gli elementi degli insiemi.



La cosa è diversa con questi altri insiemi. In questo caso avete bisogno di contare in qualche modo gli elementi degli insiemi per dire quanti sono (ad esempio lo farete raggruppandoli mentalmente a gruppi di due o tre, oppure contandoli uno ad uno).

Che conclusione si può trarre da tutto ciò?

Una percezione immediata della quantità esiste, ma vale solo per piccoli numeri!

Questo tipo di percezione non è una prerogativa umana : molti animali la hanno e la usano ed è perciò indipendente dalla capacità di linguaggio e possiede una lunga storia evolutiva; il saper distinguere ad "occhio" le quantità di insiemi piccoli, non rende le nostre capacità aritmetiche superiori a quelle di un gatto o di una gallina.

Questa è quindi la situazione, diciamo, "di partenza" nell'evoluzione culturale umana: una capacità di percezione immediata di quantità (fino a piccoli numeri, tipicamente quattro) che comunque non ci distingue dagli altri animali, e una capacità "culturale" di padronanza del concetto di numero praticamente nulla, rappresentata dal concetto:

più di due = una moltitudine

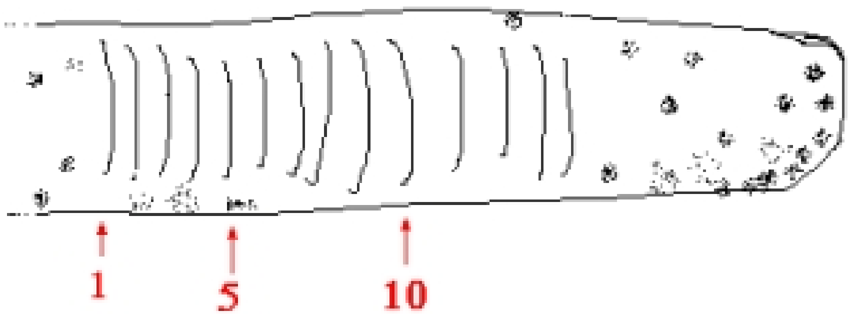
Andando avanti, vedremo invece quali sono state le tappe della *conquista umana dei numeri*.

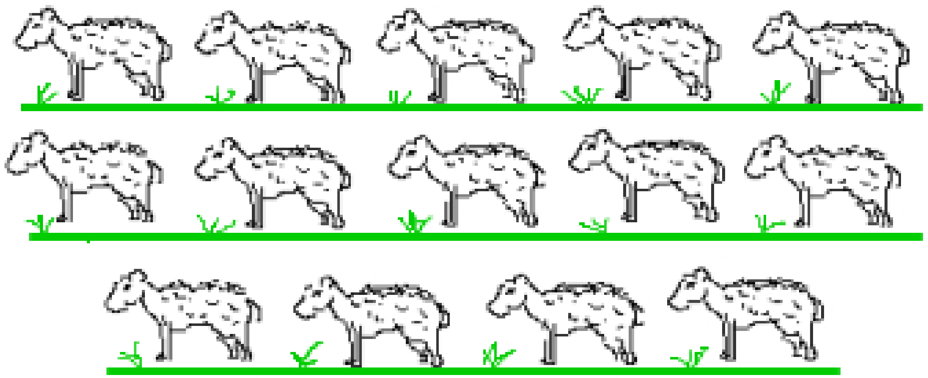
Contare senza numeri

Quello che si può supporre è che, in effetti, l'umanità abbia elaborato la "capacità di conteggio" ben prima di possedere il concetto di numero.

Come può ad esempio un pastore, totalmente analfabeta in aritmetica, controllare che il suo gregge di 14 pecore è tornato intatto dal pascolo all'ovile?

Egli non ha alcun concetto di "14", però può risolvere il suo problema così: il pastore prende un bastone e quando fa uscire le sue pecore dall'ovile, fa una tacca sul bastone per ogni pecora che esce. Al ritorno dovrà solo scorrere con un dito le tacche sul bastone, una per ogni pecora che rientra, e verificare così di non averne persa nessuna.





Certo, ciò non gli dà la possibilità di dire "quante" pecore ha, ma questa procedura risolve il suo problema. La "pratica dell'intaglio" è stata, in effetti, in uso presso popolazioni di pastori fino in tempi relativamente recenti.

Il concetto fondamentale è quello di realizzare una ***corrispondenza biunivoca*** che sta proprio alla base del ***contare*****;** in questo caso una corrispondenza fra le pecore e le tacche sul bastone. Non importa qual'è lo strumento di questa corrispondenza: il pastore potrebbe usare un mucchietto di sassi (uno per ogni pecora) e sarebbe la stessa cosa.

Possiamo figurarci analoghe situazioni: dei cacciatori arrivano presso un'altra tribù con un carico di 23 pelli. Le vogliono scambiare con sacchi di mais e si accordano per scambiare due sacchi con una pelle. Come effettueranno lo scambio senza saper contare?

Possono fare così: consegneranno le pellicce una ad una, ed in cambio di ognuna riceveranno i due sacchi di mais pattuiti, proseguendo fino all'esaurimento della merce. Nessuno dei partecipanti allo scambio saprà dire "quanti" oggetti sono stati dati e quanti ricevuti (le 23 pelli ed i 46 sacchi di mais), ma ognuno sarà sicuro che lo scambio è stato equo.

Un altro esempio è costituito dai rituali religiosi, come il recitare un certo numero di preghiere: il fedele non ha bisogno di saper contare se è munito di uno strumento adatto: una collana di preghiera (un "rosario" per i cattolici).

Un rosario cristiano (a sinistra) e una collana di grani di preghiera islamica (a destra). Usate per recitare un certo numero fissato di preghiere, queste collane hanno tutte il medesimo principio: il fedele le "sgrana" con le mani enunciando per ogni grano la preghiera dovuta. Non c'è così bisogno di saper contare.

In questo stadio, "conteggio" significa sempre soltanto "**stabilire una corrispondenza**" fra gli oggetti da contare e degli "oggetti simbolo" (siano essi sassi, perline, conchiglie, tacche su ossa o bastoni, nodi su cordicelle o altro).

A questo stadio non c'è il concetto di numero, non ci sono nemmeno le parole per indicare i singoli numeri, nè tanto meno dei simboli; c'è solo la pratica del mettere in corrispondenza due insiemi di oggetti.

Il successivo passo è di avere delle parole per i singoli numeri, e ciò avverrà in due stadi:

- Prima le parole che indicano i numeri saranno solo degli **aggettivi**: quando consideriamo "uno", "due" o "sei" come aggettivi numerali, essi sono solo attributi di insiemi, come nelle espressioni "due cani" o "sei barche". Qui "due" e "sei" hanno lo stesso valore di aggettivo, come "rosso" o "saporito".

- Poi, con l'uso del numero come un vero e proprio **nome** (cioè un **sostantivo**) si ha il completo passaggio al **concetto astratto di numero**, infatti col passaggio al sostantivo si ha la possibilità di enunciare anche proprietà dei numeri stessi (e non solo degli oggetti contati), come quando, ad esempio, diciamo "il tre è dispari".

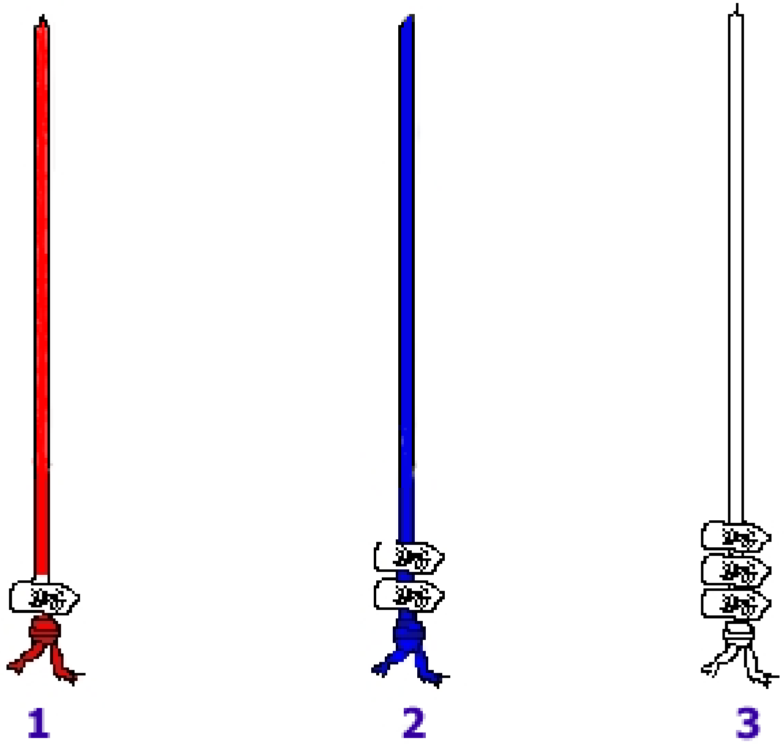
L'uso delle basi numeriche

Abbiamo visto come il "contare per oggetti" introduca dei simboli numerici (pietre, tacche, dita), pur mancando ancora il concetto di numero.

Ma che succede se si vuole contare arrivando a quantità piuttosto elevate?

Avere un simbolo per ogni passo è piuttosto ingombrante: per un gregge di 100 o più pecore diventa un po' difficile procedere con centinaia di sassi o tacche su bastoni.

La soluzione adottata è quella di dare ***valori diversi*** ai simboli usati.



Le sei conchiglie lungo i fili indicano il numero 123

Ad esempio un modo ancora in uso presso le tribù dell'Africa Occidentale per contare i capi delle loro mandrie, è quello di infilare conchiglie forate in cordicelle di diverso colore: quelle nella cordicella bianca rappresentano un'unità, quelle nella cordicella azzurra rappresentano dieci capi, e quelle nella cordicella rossa cento capi:

Nell'esempio con le cordicelle, siamo di fronte ad un **"contare in base dieci"** (cioè per potenze di dieci: unità, decine, centinaia, migliaia, ecc.) analogo al nostro modo odierno di rappresentare i numeri con le cifre.

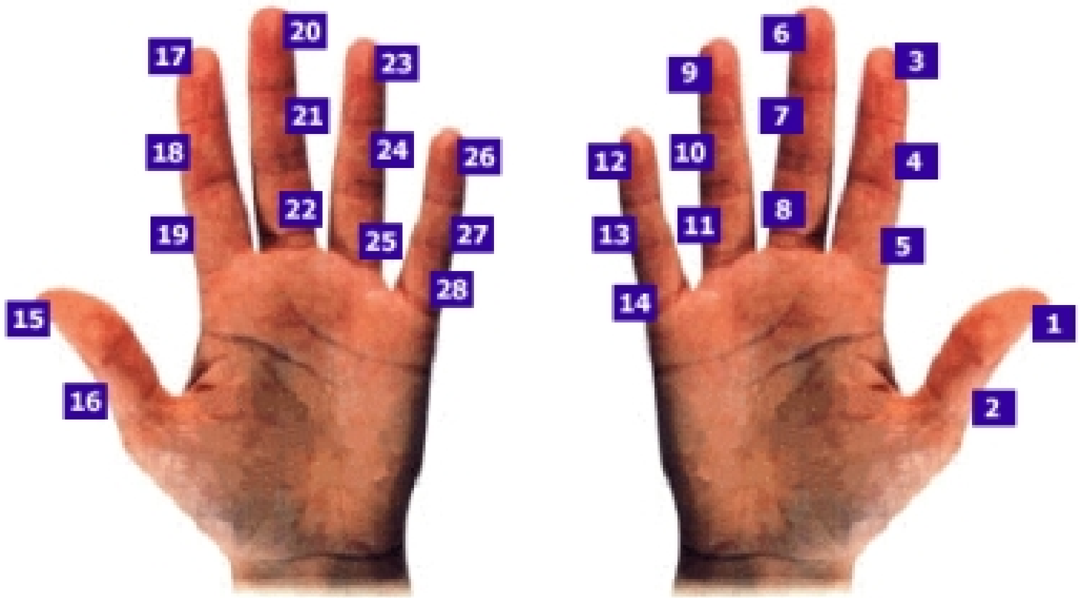
L'uso di una base per contare si è sviluppato in modi diversi in diverse parti del mondo; si rintraccia in varie popolazioni il contare con base **5**, oppure **20** (Maya ad esempio) o **12**.

I resti di queste numerazioni rimangono nelle varie lingue, ad esempio resti di un conteggio in base 20 sono le parole francesi: "*Quatrevingts*" = 80 oppure "*Quatrevingts-dix*" = 90.

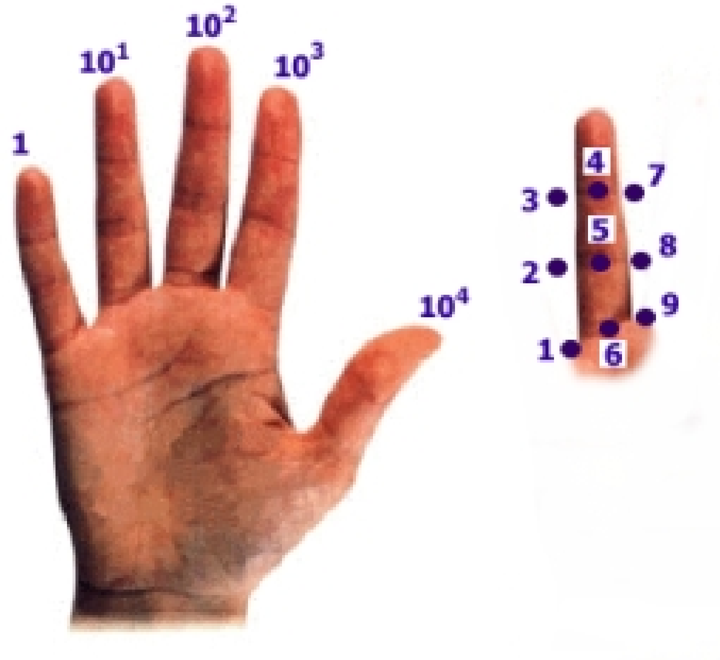
Presso i Sumeri era in uso la base **60**, della quale ci rimane l'uso nel misurare gli angoli (i gradi) ed il tempo (minuti, secondi), dovuto al fatto che i popoli della Mesopotamia sono stati i più grandi cultori dell'Astronomia nell'antichità.

L'uso di una base per contare fu un gran passo concettuale: non si faceva più solo una corrispondenza uno ad uno fra "oggetti da contare" e "oggetti simbolo", ma i simboli acquistavano valori diversi. Fu un notevole progresso verso la padronanza simbolica del numero.

Il "far di conto"



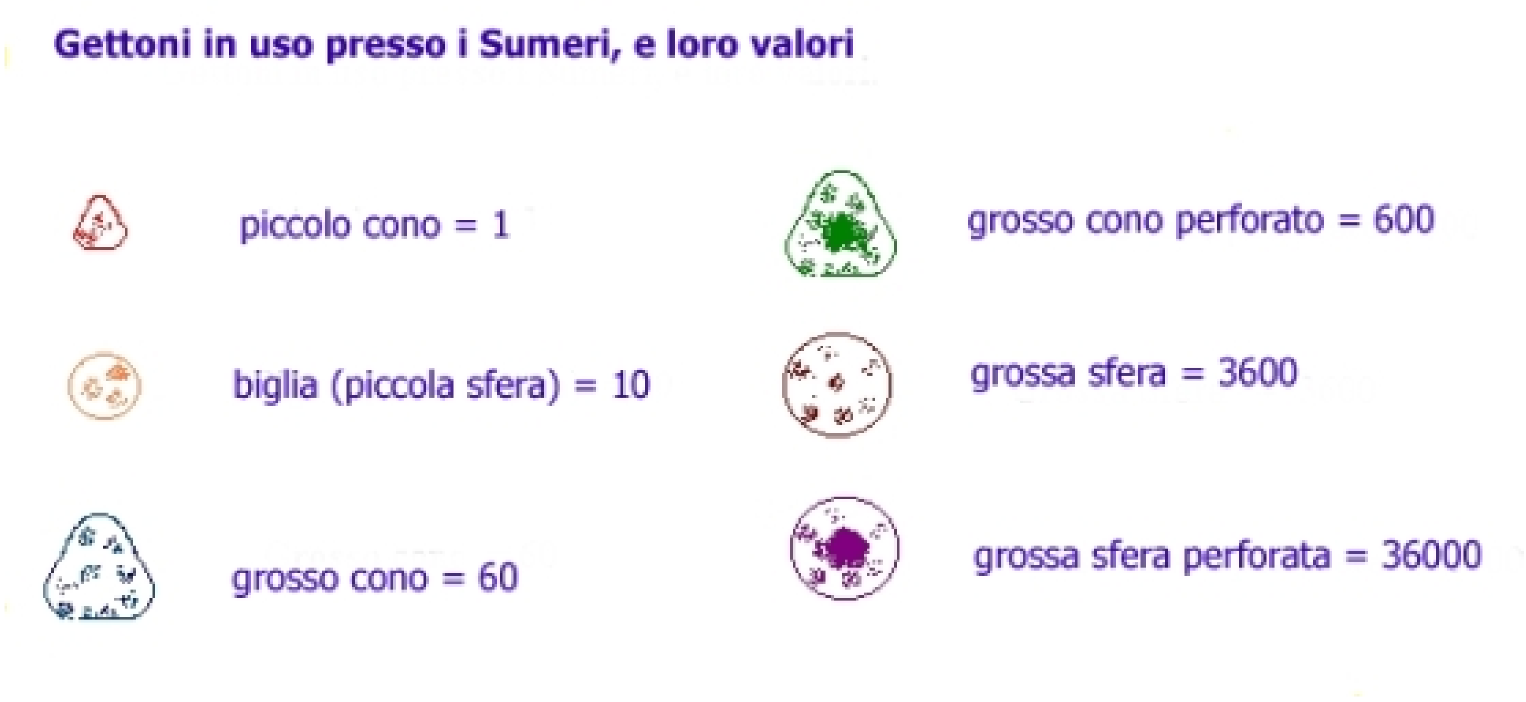
Usando le falangi delle due mani è possibile contare fino a 28.



In alcune zone della Cina, tramite l'uso dei vari lati delle articolazioni delle dita (si usa ogni dito per le successive potenze del dieci), si contava fino a 100.000 utilizzando una sola mano.

I **metodi di calcolo** si sono sviluppati parallelamente ai metodi di rappresentazione numerica, ed il primo strumento di calcolo è stato senza dubbio il corpo stesso, e soprattutto le mani. Dal conteggio elementare sulle dita si è passati a metodi più sviluppati.

I **gettoni** usati da Sumeri e Elamiti (che abitavano l'attuali Iraq ed Iran) furono però, i veri e propri, più antichi strumenti per il conteggio; la forma dei gettoni stabiliva il loro valore.

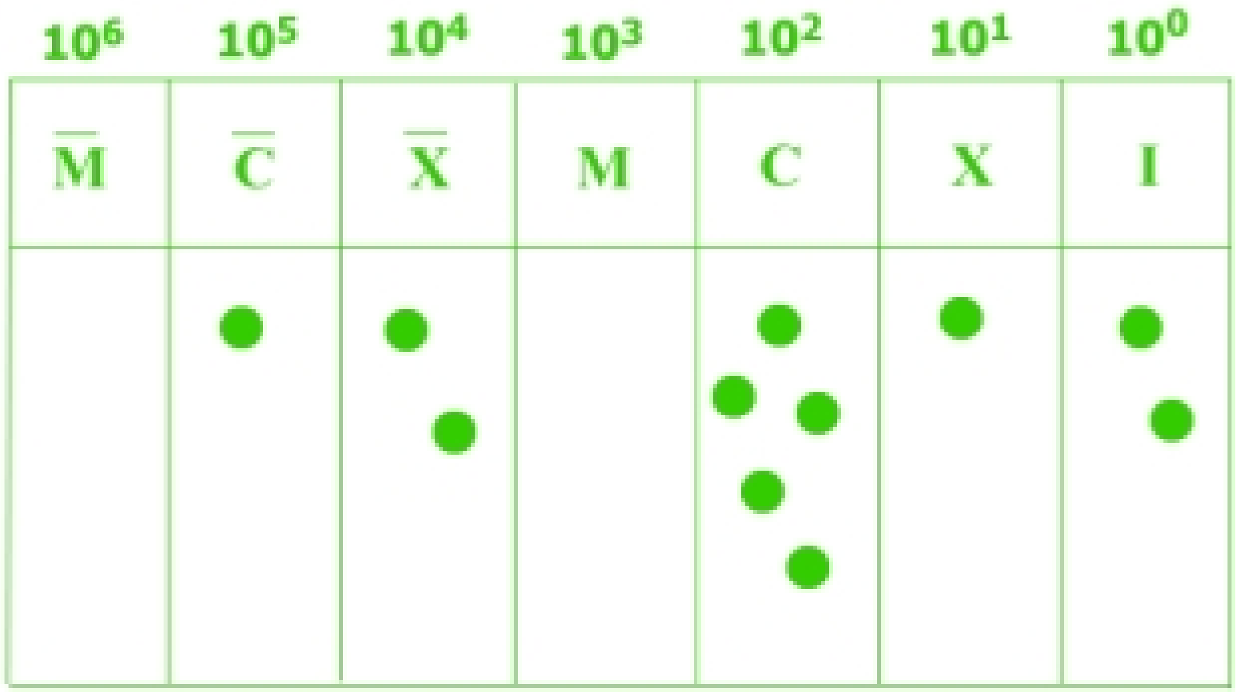


Le somme e sottrazioni venivano eseguite aggiungendo o togliendo gettoni, la moltiplicazione veniva eseguita come somma ripetuta (per esempio per moltiplicare 27 per 5 si sommava 27 cinque volte) e la divisione si effettuava tramite "spicciolature" successive e suddivisione in mucchietti.

L’Abaco

Esemplare di antico Abaco romano, in metallo con palline scorrevoli in scanalature

Lo strumento per "far di conto" che ebbe la vita più lunga nel continente europeo (e anche altrove, con forme diverse) fu l'**Abaco**, usato prima dai Greci poi dai Romani, rimase in uso in Europa fino quasi al 1700 e oltre. L'abaco è rimasto in uso efficacemente in Russia, Cina e Giappone fin dopo la II guerra mondiale (dopo la guerra, in uno scontro di prova fra un contabile giapponese con un pallottoliere ed uno americano con una calcolatrice, il giapponese vinse sia in velocità che in precisione).

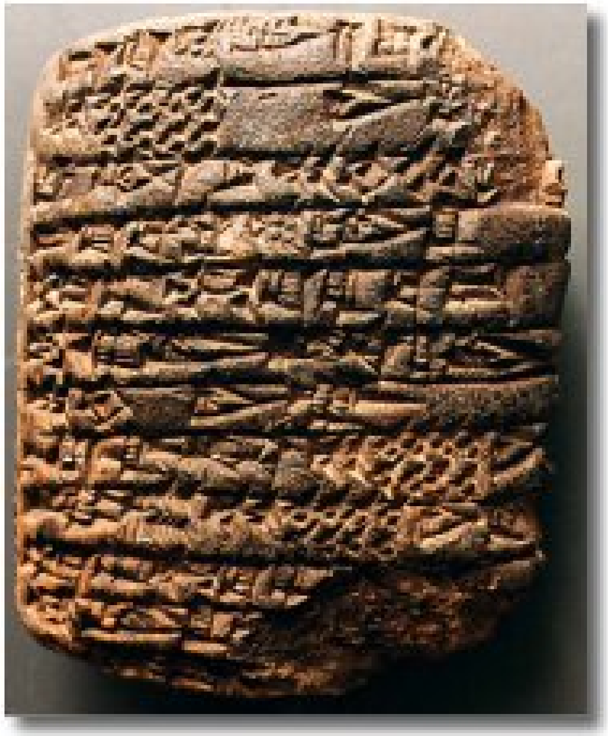


L'abaco romano semplice: nell'esempio è raffigurato il numero 120512.

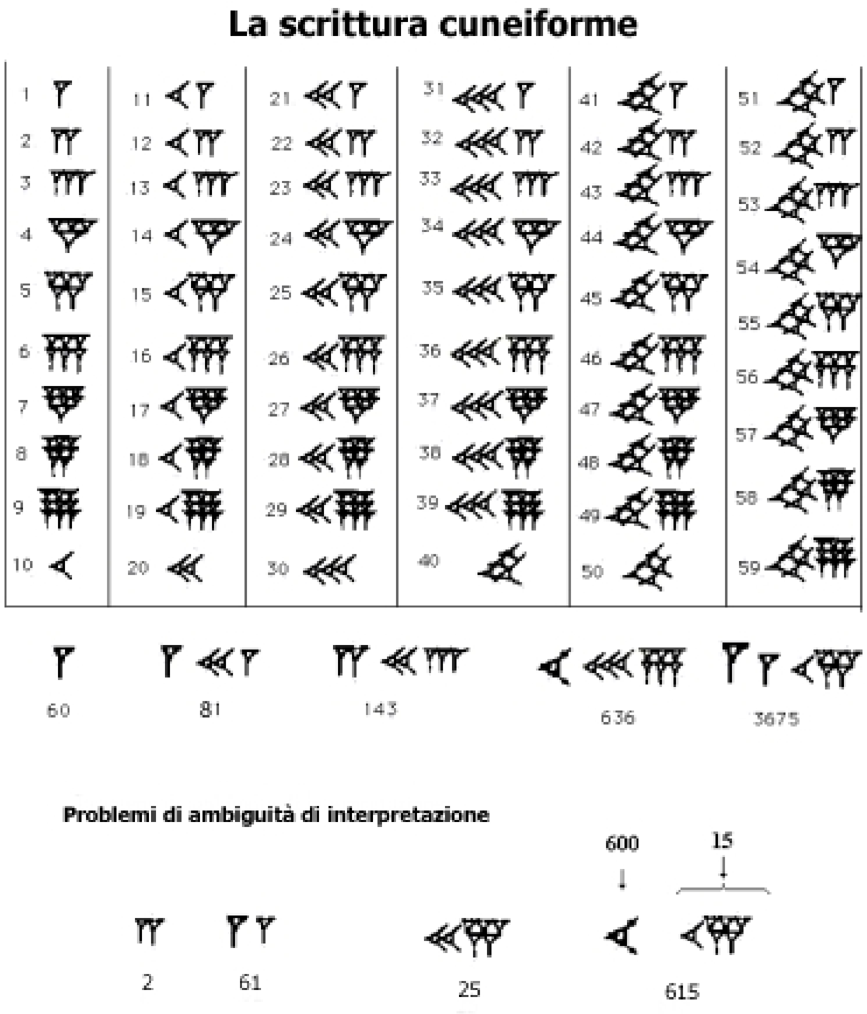
Si tratta di una tavola divisa in sezioni che rappresentano unità, decine, centinaia, ecc. (come le cifre nel nostro sistema posizionale). In tali sezioni si posano dei gettoni con cui eseguire i conteggi; in questo caso i gettoni non hanno un valore assegnato, essi indicano sempre una unità del tipo indicato dalla colonna in cui si trovano. La parola stessa "**calcolo**" viene dal latino "calculus" = sassolino, nome usato per i gettoni dell'abaco.

La scrittura ed il numero

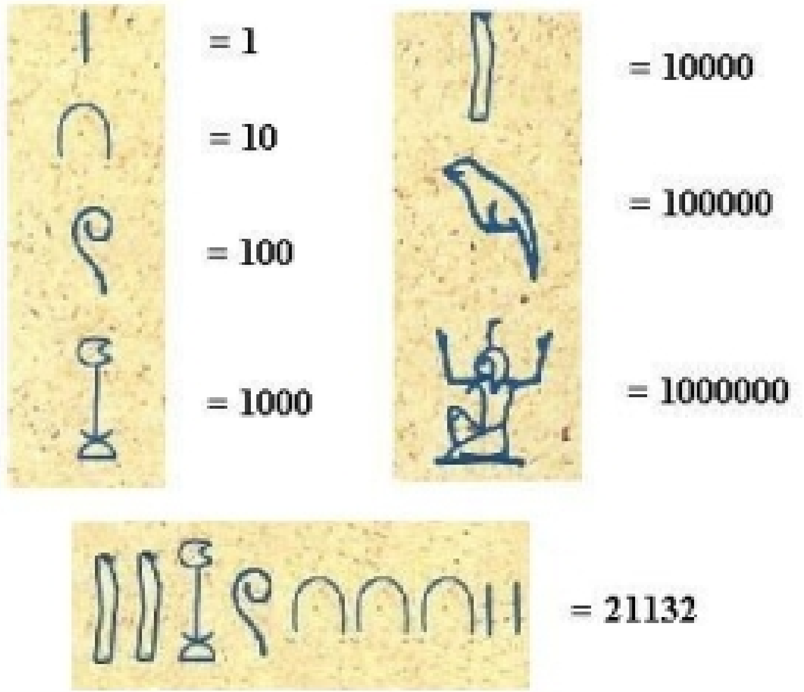
Abbiamo visto i calcoli effettuati con i gettoni dai sumeri; il passaggio successivo fu quello di utilizzare, invece dei gettoni, delle tavolette di argilla su cui venivano disegnate le forme dei gettoni stessi, ottenendo così una delle più antiche forme di "scrittura dei numeri", con la nascita di vere e proprie "cifre" scritte, come simboli numerici.



Tavoletta babilonese (1800 - 2000 a.C.)



I Babilonesi adottarono una più evoluta **scrittura cuneiforme**, sempre su tavolette d'argilla, nella quale il valore dei simboli è posizionale, come nella nostra scrittura, ma in base 60 (con base ausiliaria 10). La mancanza dello zero portava a rischi di ambiguità.



L'altra forma di scrittura numerica più antica (primi reperti attorno al 3.000 a.C.) sono i **geroglifici egizi**, nei quali i simboli hanno valori fissi e la scrittura è di tipo puramente additivo (su base 10), cioè si aggiungono simboli fino ad ottenere il numero voluto.

Praticamente tutte le civiltà che si svilupparono nel bacino del Mediterraneo (Greci, Fenici, Ebrei ...) usarono notazioni additive in base 10 (con simboli diversi).

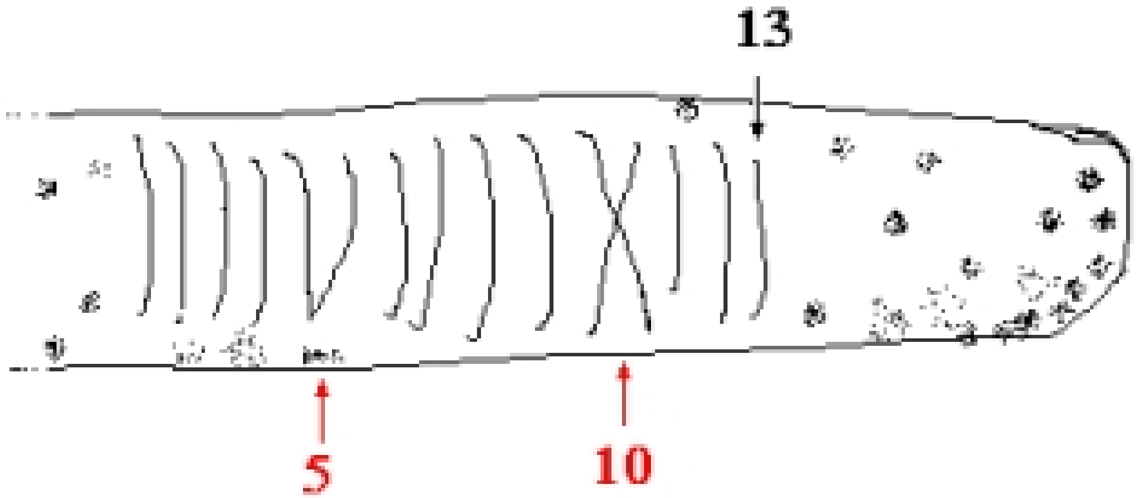
I Romani non fanno eccezione: le **cifre romane** sono anch'esse additive in base dieci (con base ausiliare 5); ricordiamo i simboli ed i loro valori:

I = 1 ; V = 5 ; X = 10 ; L = 50 ; C = 100 ; D = 500 ; M = 1000.

Esempi:

27 = **XXVII** , 97 = **XCVII** , 588 = **DLXXXVIII**, 1939 = **MCMXXXIX**

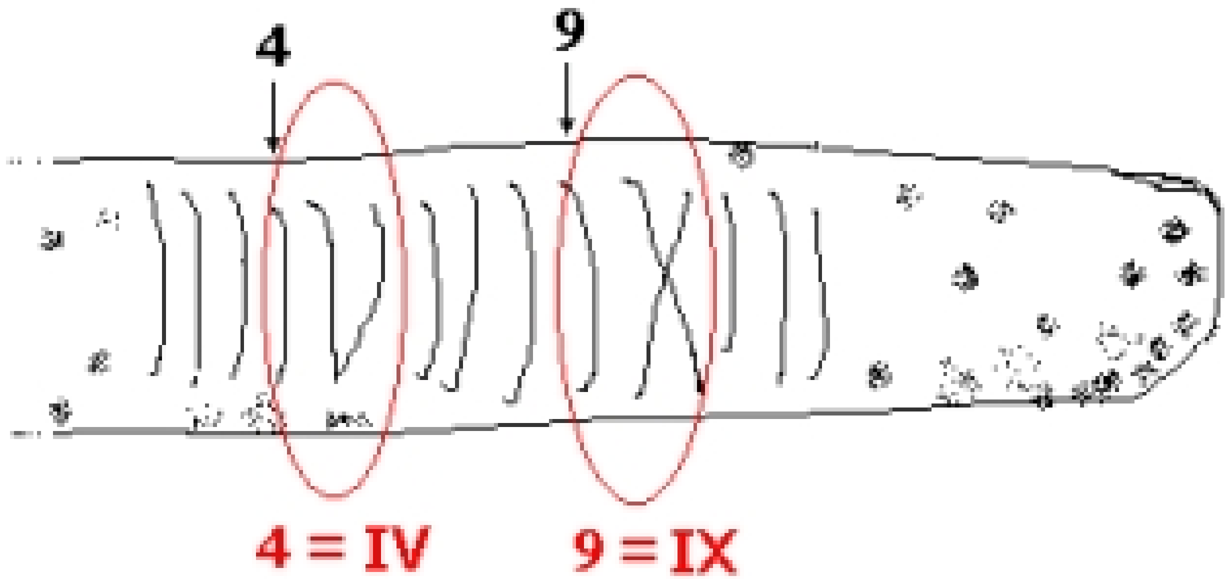
I Romani erano (in origine) un popolo di pastori, e il conteggio delle pecore avveniva con l'intaglio di tacche su bastoni: per facilitare la lettura, ogni cinque tacche si faceva una tacca a forma di "V", ed ogni dieci una "X"; poi altre forme vennero introdotte per "50", "100" e così via.



Nel sistema di numerazione romano c'è una novità: la ***notazione sottrattiva***, che viene usata per indicare il quattro ed il nove (e similmente quaranta, novanta, novecento...)

IV = 4 ; IX = 9 ; XIX = 19 ; XL=40 ; XC= 90, CM = 900

La notazione sottrattiva è un residuo della pratica dell'intaglio vista sopra; la scrittura " **IV** " invece di "**IIII**" ricorda la posizione del quattro nella serie: " **IIIIV** ", come il nove si rappresenta "**IX**" dalla serie**: IIIIVIIIIX**.



- Per rappresentare numeri più alti il sistema romano impone di creare nuovi simboli per le potenze di dieci (per il 10.000, 100.000, ecc...) e le loro metà (5.000, 50.000,...); dall'età imperiale si trova l'uso di porre una barra sopra un simbolo per moltiplicarlo per mille e di racchiuderlo in un rettangolo aperto inferiormente per moltiplicarlo per 100.000.

- Il problema con le cifre romane (rimaste in uso prevalente in Europa fino alla fine del medio evo) è che esse portarono ad un "vicolo cieco": efficaci per rappresentare i numeri, erano però quasi impossibili da usare per i calcoli, e il loro uso comporta la **separazione fra la *scrittura* dei numeri ed il *calcolo*** con essi (eseguito con l’abaco).

Il sistema posizionale

Terminiamo la nostra carrellata sulla storia dei numeri, prendendo in considerazione le cifre che usiamo oggi ed il metodo "posizionale".

In cosa consiste il metodo posizionale?

La sua principale idea, come suggerisce il nome, è che i simboli usati per le cifre non abbiano un valore fisso: il loro valore dipende dalla loro posizione nella scrittura del numero. Ad esempio, quando scriviamo il numero 2372, che cosa intendiamo? Questa scrittura sta per:

"due migliaia, tre centinaia, sette decine e due unità",

e cioè per

$$2.10^3 + 3.10^2 + 7.10^1 + 2.10^0 \ .$$

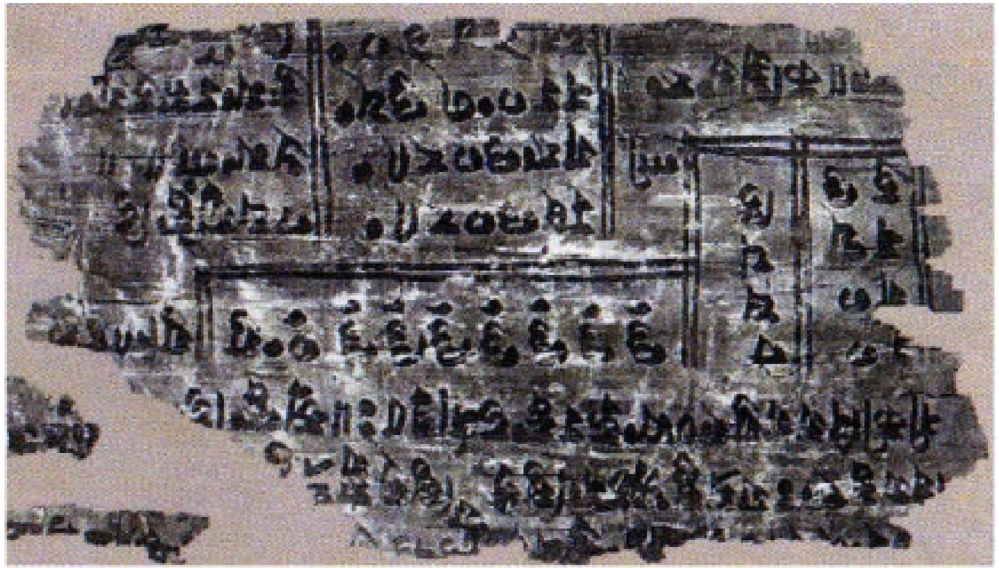
Il valore di ognuna delle cifre di 2372 dipende dalla sua posizione: il primo "2" vale duemila, mentre l'ultimo "2" vale solo due.

Nelle scritture additive il valore dei simboli è fisso: ad esempio nella scrittura romana di 72 = LXXII , i due "X" valgono sempre "10", indipendentemente dalla posizione.

I primi esempi noti di una scrittura numerica basata sui seguenti elementi:

- notazione posizionale,
- base dieci,
- presenza dello zero,
- nove simboli (cifre) oltre lo zero

risalgono al V secolo d.C. (nel trattato indiano di cosmologia **Lokavibhaga**, 485 d.C.); questo metodo si diffuse piuttosto rapidamente in India e in Indocina, come è confermato dai documenti che testimoniano l'uso di tale cifre per eseguire i conti, già nel secolo successivo.



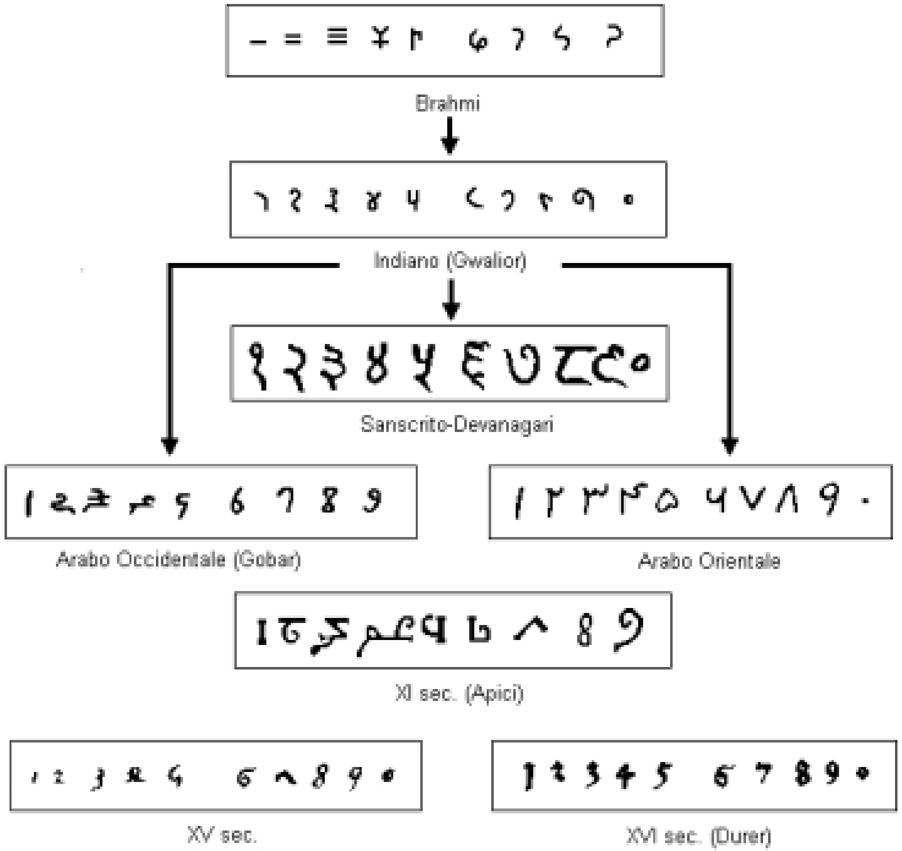
Un manoscritto indiano del VI secolo

- Nel 773, arrivò a Bagdad un'ambasciata indiana con un omaggio per il califfo Mansour ed ai suoi saggi: il calcolo e le cifre. Muhammad ibn Musa al-Khuwârizmi scrisse il primo testo in lingua araba presentando la numerazione indiana posizionale nel IX secolo (dal suo nome deriva la parola "algoritmo").

- Nel X secolo, il monaco francese Gerbert d'Aurillac apprese il metodo dai Mori di Spagna e iniziò a introdurlo in occidente, specialmente dopo esser divenuto Papa nel 999, col nome di Silvestro II.

- Le tracce di uso della numerazione indo-araba in Europa sono comunque scarse fino al XIII secolo, quando il matematico pisano Leonardo Fibonacci (che aveva viaggiato molto fra gli arabi) scrisse il **Liber Abaci**, che illustra il sistema posizionale ed il suo uso, e che fu il testo che più contribuì alla sua introduzione sistematica in Europa.

- L'uso che facciamo tuttora delle cifre di origine indiana mostra la superiorità della scrittura posizionale rispetto a quella additiva romana (due ragioni fra tutte: la facilità nello scrivere numeri grandi e la possibilità di fare i conti usando le cifre scritte). Comunque il suo uso efficiente richiede una novità: avere una cifra per il numero **zero**.



La figura mostra alcuni passi dell'evoluzione dei simboli per le cifre Indo-Arabe.

La penetrazione del nuovo sistema in Europa fu abbastanza lenta e all'inizio osteggiata; nel XIV secolo in vari luoghi l'uso delle "cifre arabe" era proibito, temendo che fosse troppo facile alterarle per eseguire truffe. Nel Rinascimento si svolgevano gare di calcolo fra "Abacisti" ed "Algoristi" (che usavano il calcolo scritto, con le cifre indo-arabe) e l'abaco fu usato fino al XVIII secolo.

Conclusioni

Quanto sopra conclude questo breve trattato sullo sviluppo dei sistemi di numerazione che ci ha portato a parlare dei cosidetti **numeri naturali** 0,1,2,3,4,... mentre più lungo sarebbe il discorso se si volesse considerare tutto ciò che l'uomo ha creato riguardo ai numeri.

Alcuni esempi? L'introduzione dei numeri negativi (quest'ultimi risalenti ai tempi degli scribi egiziani) che originano i **numeri interi**. Lo sviluppo dei numeri frazionari che caratterizzano i **numeri razionali**. Senza contare sviluppi più recenti, come il completamento della formalizzazione rigorosa della teoria dei **numeri reali** (ad es. π o $\sqrt{2}$) che avviene solo a metà del XIX secolo, o le più sofisticate teorie dei **numeri complessi**.

Alcuni suggerimenti bibliografici

- C.Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano (1968) ;
- G.Ifrah: *Storia Universale dei Numeri.* Mondadori, Milano (1984);
- M.Klein: ***Storia del pensiero matematico*** Einaudi, Torino, (1991);
- L.L.Radice: *La Matematica da Pitagora a Newton*. Ed. Riuniti, Roma (1992).