Sul XIX problema di Hilbert

Lorenzo Brasco

12 Aprile 2019

Cos'è un'equazione ellittica?

Si tratta di un'**equazione alle derivate parziali**, ovvero di un'equazione che contiene una funzione incognita u di N variabili e le sue derivate parziali

Lineare a coefficienti costanti

$$\mathrm{div}\,(A\,\nabla u) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

con $A = (a_{ij})$ matrice **simmetrica definita positiva**

Lineare a coefficienti variabili

$$\mathrm{div}\,(A(x)\,\nabla u) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

con $A(x) = (a_{ij}(x))$ matrice **simmetrica definita positiva** dipendente da x

Più in generale

Quasilineare a coefficienti variabili

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{F}(x, \nabla u)) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\,(f_i(x, \nabla u)) = 0$$

con $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ campo vettoriale **monotono**

$$\langle \mathcal{F}(x, \xi) - \mathcal{F}(x, w), \xi - w \rangle > 0$$

Osservazione

Il caso lineare precedente corrisponde a

$$\mathcal{F}(x, \xi) = A(x)\,\xi$$

che è monotono $\Longleftrightarrow$ A è definita positiva

Esempi di equazioni ellittiche

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto limitato, che rappresenta un conduttore elettrico. Supponiamo che Ω sia immerso in un campo elettrico conservativo, generato da una concentrazione di carica **esterna** a Ω.

1. Equazione di Laplace

Il potenziale elettrico u risolve

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega$$

ovvero

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

Osservazione

Si tratta di una equazione ellittica **lineare a coefficienti costanti**, con matrice dei coefficienti $A = \mathrm{Id}$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e limitato. Assegnamo un dato al bordo U e supponiamo di voler trovare una funzione di due variabili che coincida con U su $\partial\Omega$ e tale che il suo grafico abbia la superficie minima possibile

2. Equazione delle superfici minime

La funzione u cercata risolve

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \text{ in } \Omega$$

con dato al bordo U su $\partial\Omega$

Osservazione

Equazione ellittica **quasilineare a coefficienti costanti**, con

$$A(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

funzione monotona, in quanto **gradiente della funzione convessa** $\sqrt{1+|z|^2}$

Consideriamo una superficie con **curvatura Gaussiana** costante uguale a K. Supponiamo la metrica Riemanniana su questa superficie sia data da

$$(f(x,y))^2\,(dx^2+dy^2)$$

3. Equazione di Liouville

La funzione f, detta **fattore conforme**, risolve

$$-\Delta(\log f) = K\,f^2$$

ovvero, ponendo $u = \log f$, questa risolve

$$-\Delta u = K\,e^{2\,u}$$

Osservazione

Equazione ellittica **semilineare**, la parte principale dell'equazione è data ancora dall'operatore ellittico a coefficienti costanti Δ

Un'osservazione di Hilbert

David Hilbert osservò che le **equazioni ellittiche** negli esempi hanno le seguenti caratteristiche comuni:

1. hanno la forma

$$\operatorname{div}(\nabla F(\nabla u)) = 0 \qquad \text{o più in generale} \qquad \operatorname{div}(\nabla F(\nabla u)) = h(u)$$

   ovvero sono l'**equazione di Eulero-Lagrange** di un problema del tipo

$$\min \int_\Omega F(\nabla \varphi)\, dx \quad + \quad \text{condizioni al bordo}$$

2. l'ellitticità dell'equazione si riflette nel fatto che ∇F è monotono, ovvero F **è convessa**
3. le loro soluzioni sono analitiche

Eulero-Lagrange?

Se u è minimo, allora per ogni φ a supporto compatto, la funzione di una variabile

$$g(t) = \int_\Omega F(\nabla u + t\,\nabla\varphi)\,dx$$

ammette minimo in $t = 0$. Dal classico *Teorema di Fermat*

$$0 = g'(0) = \int \langle \nabla F(\nabla u), \nabla\varphi\rangle\,dx$$

Questa è detta **equazione di Eulero-Lagrange in forma debole** del problema di minimo

Supponendo di poter integrare per parti, il minimo u soddisfa

$$\int \mathrm{div}\,(\nabla F(\nabla u))\,\varphi\,dx = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi$$

ovvero

$$\mathrm{div}\,(\nabla F(\nabla u)) = 0$$

Formulazione del problema

David Hilbert nel 1900 formula il seguente[1]

Hilbert XIX

Supponiamo che u sia **minimo** *di una Lagrangiana*

$$\int F(\nabla\varphi)\, d\varphi \qquad \text{o più in generale} \qquad \int F(x, \varphi, \nabla\varphi)\, dx$$

con F tale che:

1. *F è una funzione analitica dei suoi argomenti;*
2. *F è convessa rispetto alla variabile $\xi = \nabla\varphi$;*
3. $\lambda\,\mathrm{Id} \leq D^2_\xi F \leq \Lambda\,\mathrm{Id}$, *con $0 < \lambda \leq \Lambda$.*

Allora u è una funzione analitica

[1] Durante il *Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi*

Il punto di partenza

Dobbiamo mostrare che se u minimizza

$$\min \int_{\Omega} F(\nabla u)\, dx \qquad + \text{condizioni al bordo}$$

allora u è analitica. In particolare, dobbiamo dimostrare che u è **derivabile con continuità infinite volte**

Cosa sappiamo su u?

In altre parole, quanta regolarità hanno la classe di funzioni tra cui cerchiamo il minimo

Il **Metodo Diretto** nel Calcolo delle Variazioni

Usando una variante del **Teorema di Weierstrass** (“*una funzione continua su un chiuso e limitato ammette massimo e minimo*”), il minimo u si trova nella classe delle funzioni che **hanno derivate prime in senso debole, con quadrato sommabile**. Chiamiamo spazio di Sobolev $W^{1,2}$ l'insieme di queste funzioni

Risultati intermedi I

- Bernstein (1905)

Se u è una soluzione di **classe** C^3 di

$$\mathrm{div}(\nabla F(\nabla u)) = 0$$

allora u è analitica

Osservazione

Il risultato è notevole, ma siamo ben distanti dall'aver risolto Hilbert XIX. Infatti abbiamo detto che la nostra $u \in W^{1,2}$, quindi **ha soltanto una derivata**, e tra l'altro in un senso debole. Per poter applicare il risultato di Bernstein, dobbiamo **colmare il divario** tra $W^{1,2}$ e C^3

Risultati intermedi II

- Hopf (1929), Schauder (1934)

Se $\nabla u \in C^{0,\alpha}$, allora $\nabla u \in C^{1,\alpha}$

Più in generale, se $\nabla u \in C^{k,\alpha}$, allora $\nabla u \in C^{k+1,\alpha}$

- Morrey (1936)

HILBERT XIX risolto per $N = 2$ variabili

Osservazione

La tecnica di Morrey si basa su una generalizzazione del concetto di mappa conforme e **non funziona** in più variabili

Risultati intermedi III

- Shiffman (1947), Stampacchia (1952)

Il gradiente ∇u di un minimo u si può a sua volta derivare in **senso debole**. Inoltre, ogni componente u_{x_k} del gradiente risolve **in senso debole**

$$\mathrm{div}(D^2F(\nabla u)\,\nabla(u_{x_k})) = 0$$

Questo vuol dire che u_{x_k} risolve (in senso debole) una **equazione ellittica lineare a coefficienti variabili**, con matrice dei coefficienti

$$A = D^2F(\nabla u)$$

Si osservi che tale matrice A è **limitata** per l'ipotesi

$$\lambda\,\mathrm{Id} \le D^2_\xi F \le \Lambda\,\mathrm{Id}, \qquad \text{con } 0 < \lambda \le \Lambda$$

Il tassello mancante

Ad inizio 1955, la situazione su HILBERT XIX è la seguente:

1. se $u \in W^{1,2}$ è minimo, allora $\nabla u \in W^{1,2}$

3. dato $k \in \mathbb{N}$, se $\nabla u \in C^{k,\alpha}$, allora anche $\nabla u \in C^{k+1,\alpha}$

Il tassello mancante

2. se $\nabla u \in W^{1,2}$, allora anche $\nabla u \in C^{0,\alpha}$

• Per Shiffman & Stampacchia, ogni componente u_{x_k} del gradiente è soluzione di un'equazione ellittica **a coefficienti variabili limitati**. Quindi possiamo riformulare

Il tassello mancante (riformulazione)

2. se $v \in W^{1,2}$ è soluzione debole di

$$\mathrm{div}(A(x)\,\nabla u) = 0, \qquad \text{con } 0 < \lambda \leq A(x) \leq \Lambda$$

allora $u \in C^{0,\alpha}$

La soluzione di E. De Giorgi

- Nell'Agosto 1955, Ennio De Giorgi viene a conoscenza di Hilbert XIX grazie a Guido Stampacchia

- Nell'Ottobre 1955, Ennio De Giorgi presenta al Congresso UMI il seguente

Teorema [De Giorgi]

Sia $u \in W^{1,2}$ una soluzione debole di

$$\operatorname{div}(A(x)\,\nabla u) = 0, \qquad \textit{con } 0 < \lambda \leq A(x) \leq \Lambda$$

allora $u \in C^{0,\alpha}$

Corollario

I minimi di una Lagrangiana

$$\int_\Omega F(\nabla u)\,dx, \qquad \textit{con } F \textit{ analitica}, \quad 0 < \lambda \leq D^2 F \leq \Lambda$$

sono funzioni analitiche

La soluzione di J. Nash

In maniera indipendente, John Nash dimostra lo stesso teorema, in un lavoro completato nel Maggio 1958.

result (3). P. R. Garabedian writes from London of a manuscript by Ennio de Giorgi containing such a result. See de Giorgi's note, reference [9].

Figura: Estratto dal lavoro originale di Nash

In realtà, il risultato di Nash è più generale perché valido per **equazioni paraboliche**. Contiene quindi il Teorema di De Giorgi come caso particolare.

Osservazione

Le tecniche usate da Nash sono del tutto differenti. Per quanto riguarda le equazioni ellittiche, le sue idee hanno avuto un impatto molto più limitato sugli sviluppi successivi della Teoria della Regolarità.

Il ruolo di J. Moser

Poco tempo dopo le dimostrazioni di De Giorgi e Nash, compare il seguente lavoro di J. Moser

COMMUNICATIONS ON PURE AND APPLIED MATHEMATICS, VOL. XIII, 457–468 (1960)

A New Proof of de Giorgi's Theorem Concerning the Regularity Problem for Elliptic Differential Equations

JÜRGEN MOSER

In esso si dimostra nuovamente il Teorema di De Giorgi-Nash, usando una **tecnica iterativa** simile a quella di De Giorgi, ma ancora più elegante e per certi versi più semplice.

Oggigiorno, la tecniche iterative di De Giorgi & Moser sono lo standard essenziale per studiare problemi di Regolarità Ellittica

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ И АНАЛИТИЧНОСТИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ КРАТНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ[1])

Эннио де Джорджи

Резюме. Изучаются экстремали[2]) некоторых кратных регулярных интегралов в предположении, что экстремали имеют первые частные производные, суммируемые с квадратом; доказывается, что эти производные удовлетворяют условию Гёльдера, откуда следует бесконечная дифференцируемость и аналитичность экстремалей.

Figura: Traduzione in russo dell'articolo di De Giorgi (1960, traduzione di S. N. Kruzhkov)