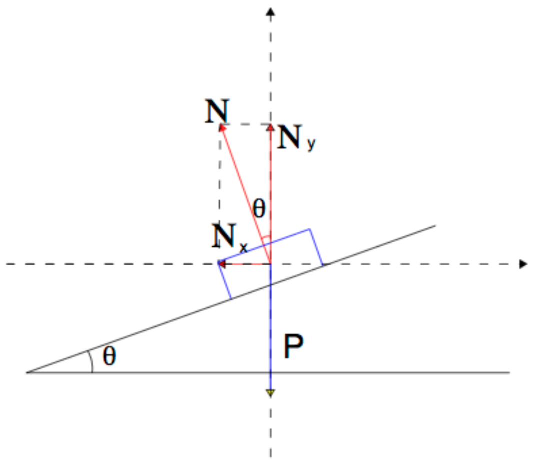
Problema 22

Una curva di un'autostrada, di raggio R=500 m, viene percorsa alla velocità di v=100 km/h.

(a) Determinare l'inclinazione della strada affinché le autovetture che la percorrono risentano di un'azione trasversale nulla anche in assenza di attrito.
(b) Ricavare il coefficiente di attrito minimo μ_s affinché l'automobile affronti la curva su strada piana.

Soluzione Punto (a)



Sulla macchina agiscono due forze, la reazione vincolare $\overline{N}$ e la forza peso $\overline{P}$.

Vogliamo che il corpo percorra un moto circolare: affinché questo accada il corpo deve avere una accelerazione centripeta di intensità $|\overline{a_c}| = v^2/R$, quindi deve essere soggetto a una forza centripeta di intensità $F_c = m|\overline{a_c}|$.

Prendiamo un sistema di riferimento centrato sulla macchina come da figura, con asse y diretto lungo la componente N_y della reazione vincolare, e asse x diretto lungo la componente N_x, parallela al raggio della circonferenza. Dal diagramma di corpo libero abbiamo che le forze agenti sulla macchina sono:

$$\begin{cases} \sum F_x = N_x \\ \sum F_y = -P + N_y \end{cases}$$

Imponiamo quindi che la risultante delle forze su x sia uguale all' intensità della forza centripeta F_c, mentre quella su y sia nulla.

$$\begin{cases} \sum F_x = N_x = F_c = m|\overline{a_c}| \\ \sum F_y = -P + N_y = 0 \end{cases}$$

Scomponiamo la reazione vincolare su x e su y ottenendo $N_x = N\sin\theta$ e $N_y = N\cos\theta$ e sostituiamo nel sistema precedente tali valori.

$$\begin{cases} \sum F_x = N\sin\theta = m|\overline{a_c}| \\ \sum F_y = -P + N\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Sapendo che $P = mg$, ricaviamo

$$\begin{cases} N = \dfrac{m|\overline{a_c}|}{\sin\theta} \\ -mg + N\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Sostituendo N della prima equazione nella seconda si ha:

$$-mg + \frac{m|\overline{a_c}|}{\sin\theta}\cos\theta = 0$$

Semplificando si ottiene:

$$\tan\theta = \frac{|\overline{a_c}|}{g} = \frac{v^2}{gR}$$

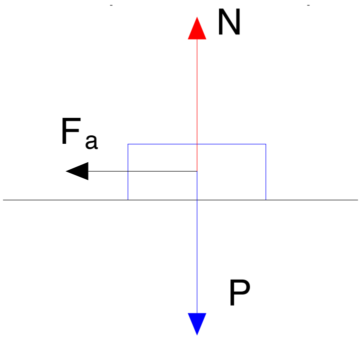
Quindi:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{gR}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{(100\ \mathrm{km/h})^2}{9.81\ \mathrm{m/s^2}\ 500\ \mathrm{m}} = \tan^{-1}\frac{(27.78\ \mathrm{m/s})^2}{9.81\ \mathrm{m/s^2}\ 500\ \mathrm{m}} = \tan^{-1}0.157 = 8.93°$$

Soluzione Punto (b)



Vogliamo che il corpo percorra un moto circolare: affinché questo accada il corpo deve avere una accelerazione centripeta di intensità $|\overline{a_c}| = v^2/R$, quindi deve essere soggetto a una forza centripeta di intensità $F_c = m|\overline{a_c}|$.

Lungo la direzione radiale l'unica forza che agisce è la forza di attrito, in quanto la reazione vincolare è diretta perpendicolarmente alla strada, come da figura.

Prendiamo un sistema di riferimento centrato sulla macchina come da figura, con asse y diretto lungo $\overline{N}$, e asse x diretto lungo $\overline{F_a}$, parallela al raggio della circonferenza. Dal diagramma di corpo libero abbiamo che le forze agenti sulla macchina sono:

$$\begin{cases} \sum F_x = F_a \\ \sum F_y = -P + N \end{cases}$$

Imponiamo quindi che la risultante delle forze su x sia uguale all' intensità della forza centripeta F_c, mentre quella su y sia nulla.

$$\begin{cases} \sum F_x = F_a = F_c = m|\overline{a_c}| \\ \sum F_y = -P + N = 0 \end{cases}$$

Poiché il modulo della forza di attrito ha intensità $F_a = \mu_s N$ e che la normale N ha intensità $N = mg$ e che $|\overline{a_c}| = v^2/R$, si ha che:

$$\mu_s mg = m|\overline{a_c}| = m\,v^2/R$$

Il coefficiente di attrito statico è allora:

$$\mu_s = \frac{v^2}{Rg} = \frac{(27.78\ \mathrm{m/s})^2}{9.81\ \mathrm{m/s^2}\ 500\ \mathrm{m}} = 0.157$$