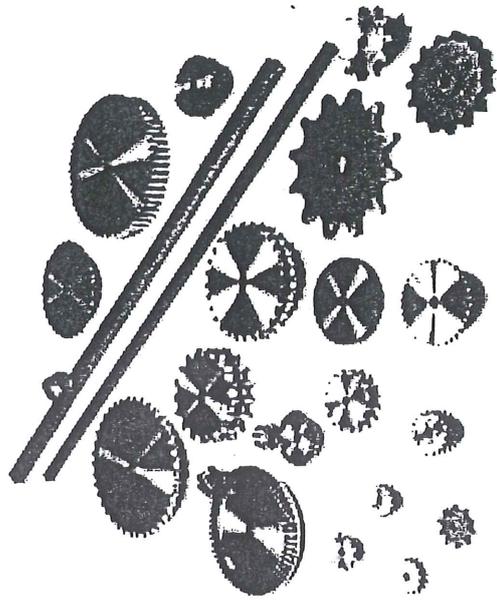
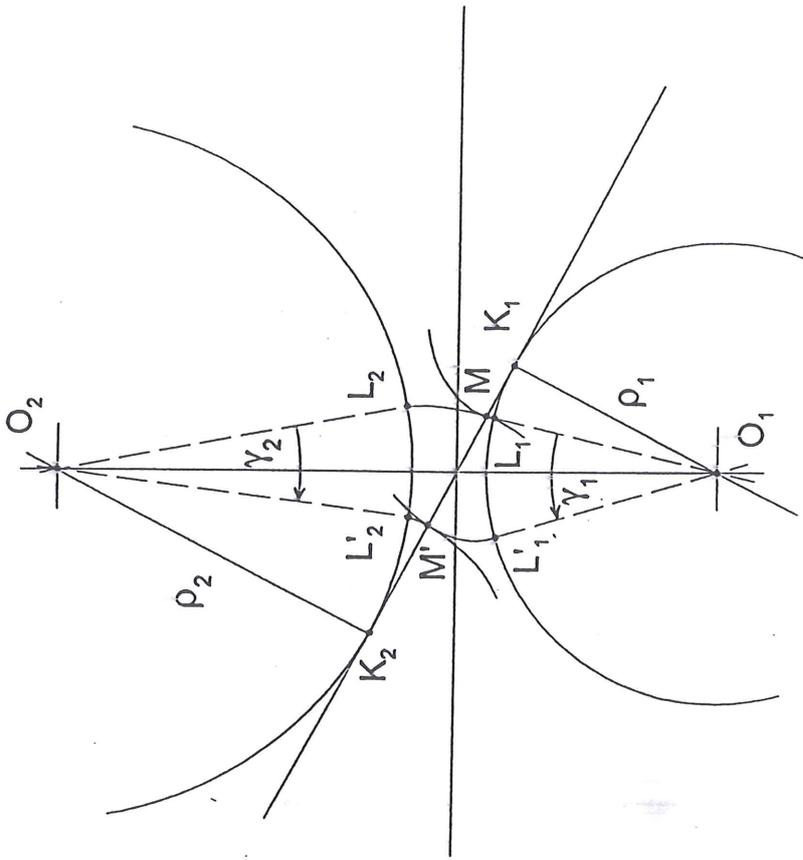


RUOTE DENTATE



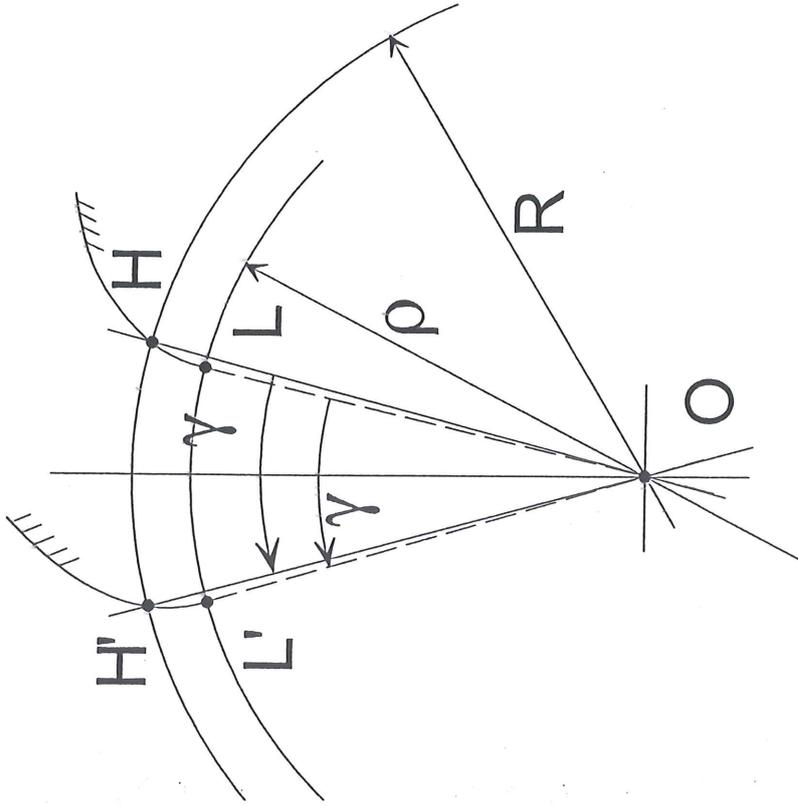
Ruote Dentate
 Il rapporto di trasmissione e' costante e dipende dal rapporto tra i raggi base delle ruote



$$\begin{aligned}
 K_1 M &= K_1 L_1 & K_2 M &= K_2 L_2 \\
 K_1 M' &= K_1 L_1' & K_2 M' &= K_2 L_2' \\
 M M' &= L_1 L_1' & M M' &= L_2 L_2'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_1 L_1' &= \rho_1 \gamma_1 & \tau &= \frac{\rho_1}{\Omega_1} = \frac{\rho_2}{\Omega_2} \\
 L_2 L_2' &= \rho_2 \gamma_2
 \end{aligned}$$

Dente in due posizioni corrispondenti ad una rotazione γ della ruota

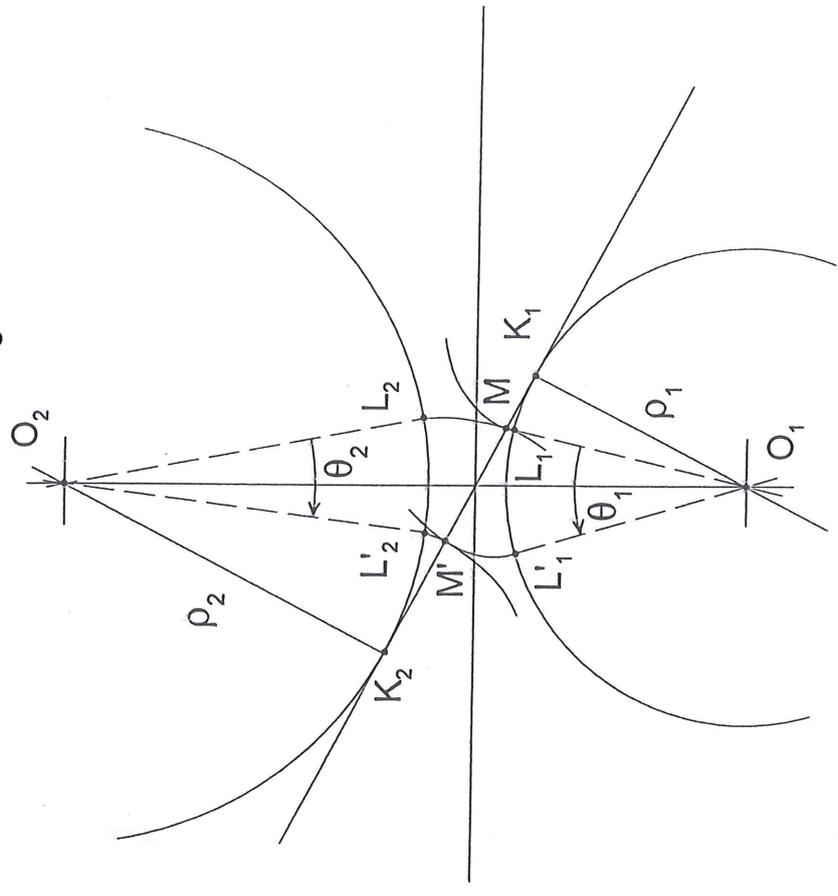


$$L_1 L_1' = \rho_1 \gamma_1 \quad LL' = \rho \gamma$$

$$L_2 L_2' = \rho_2 \gamma_2 \quad HH' = R \gamma$$

$$\frac{HH'}{LL'} = \frac{R}{\rho} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Due denti contigui



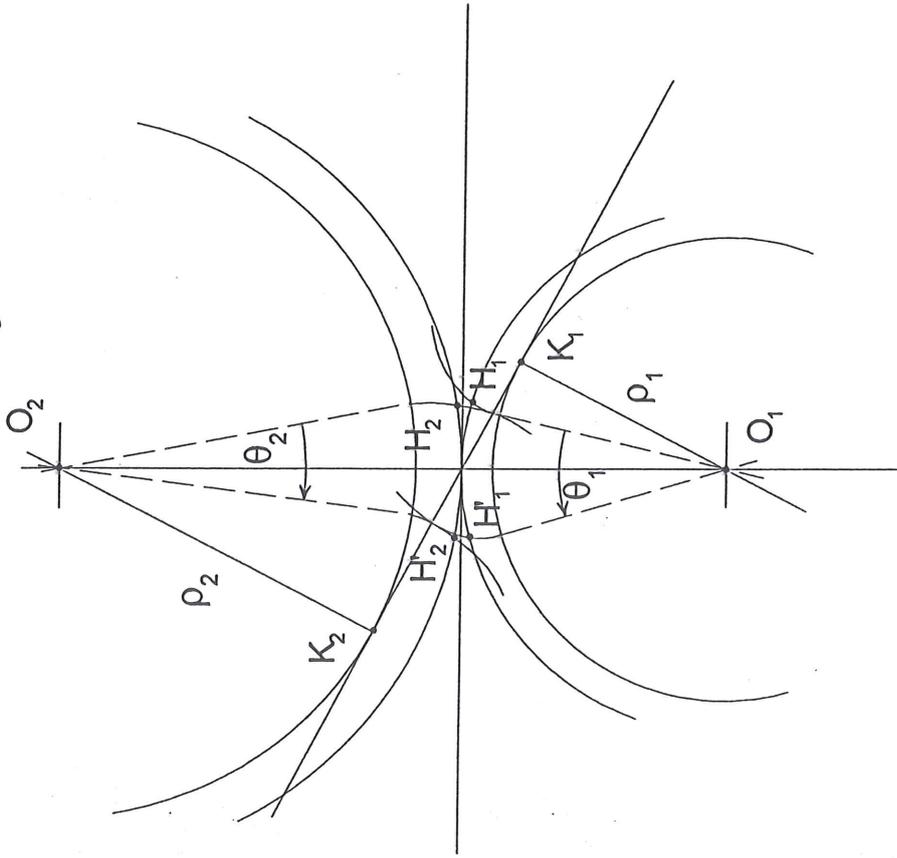
$$L_1 L_1' = L_2 L_2' \quad \frac{2\pi}{Z_1} \rho_1 = \frac{2\pi}{Z_2} \rho_2$$

$$\rho_1 \theta_1 = \rho_2 \theta_2$$

$$p_b = \frac{2\pi}{Z} \rho$$

Passo base

Due denti contigui



$$H_1 H_1' = H_2 H_2' \quad \frac{2\pi}{Z_1} R_1 = \frac{2\pi}{Z_2} R_2$$

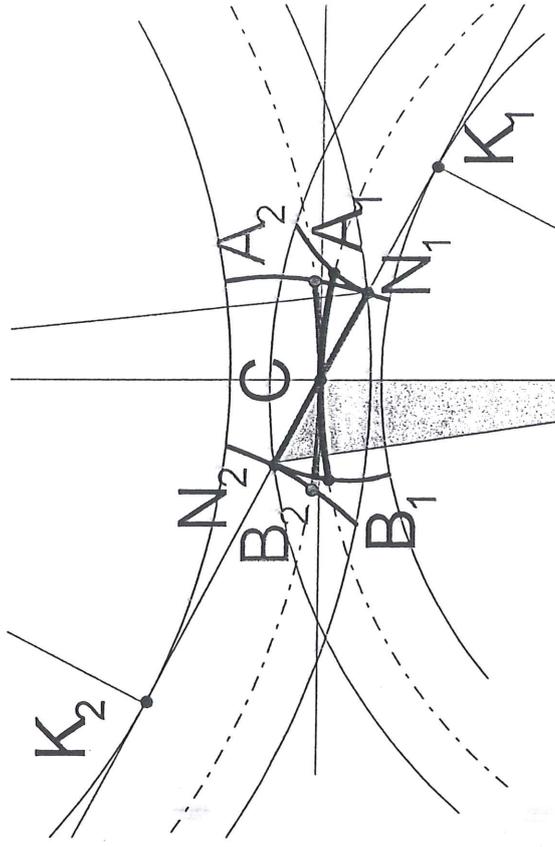
$$R_1 \vartheta_1 = R_2 \theta_2$$

$$p = \frac{2\pi}{Z} R$$

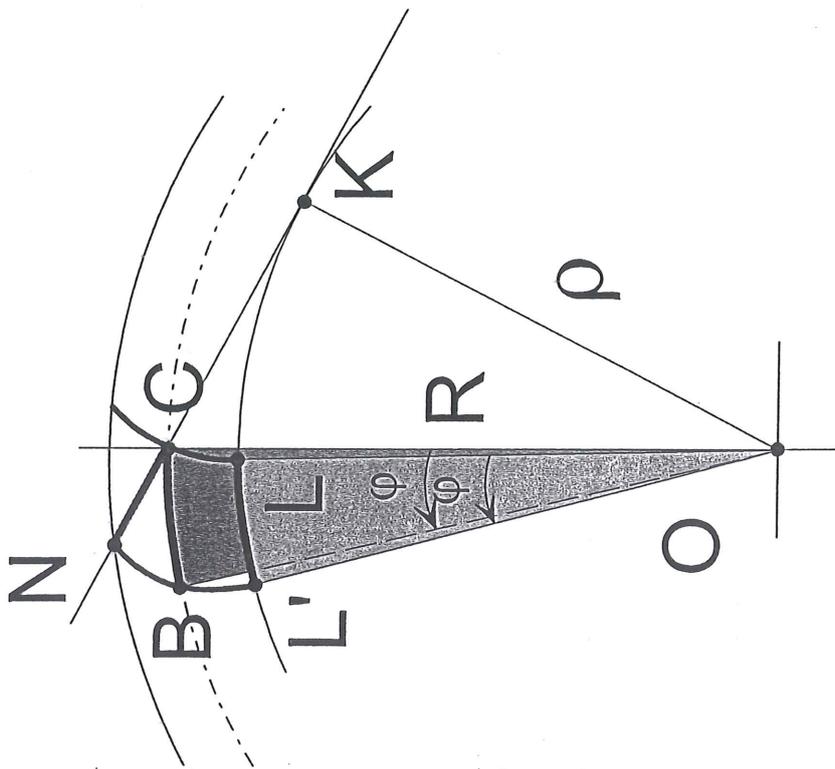
Passo

$$p_b = \frac{\rho}{R} p = p \cos \alpha$$

SEGMENTO DI AZIONE $N_1 N_2$ e
ARCO DI AZIONE $A_1 B_1 = A_2 B_2$



Segmento di azione e arco di azione (fase di recesso)

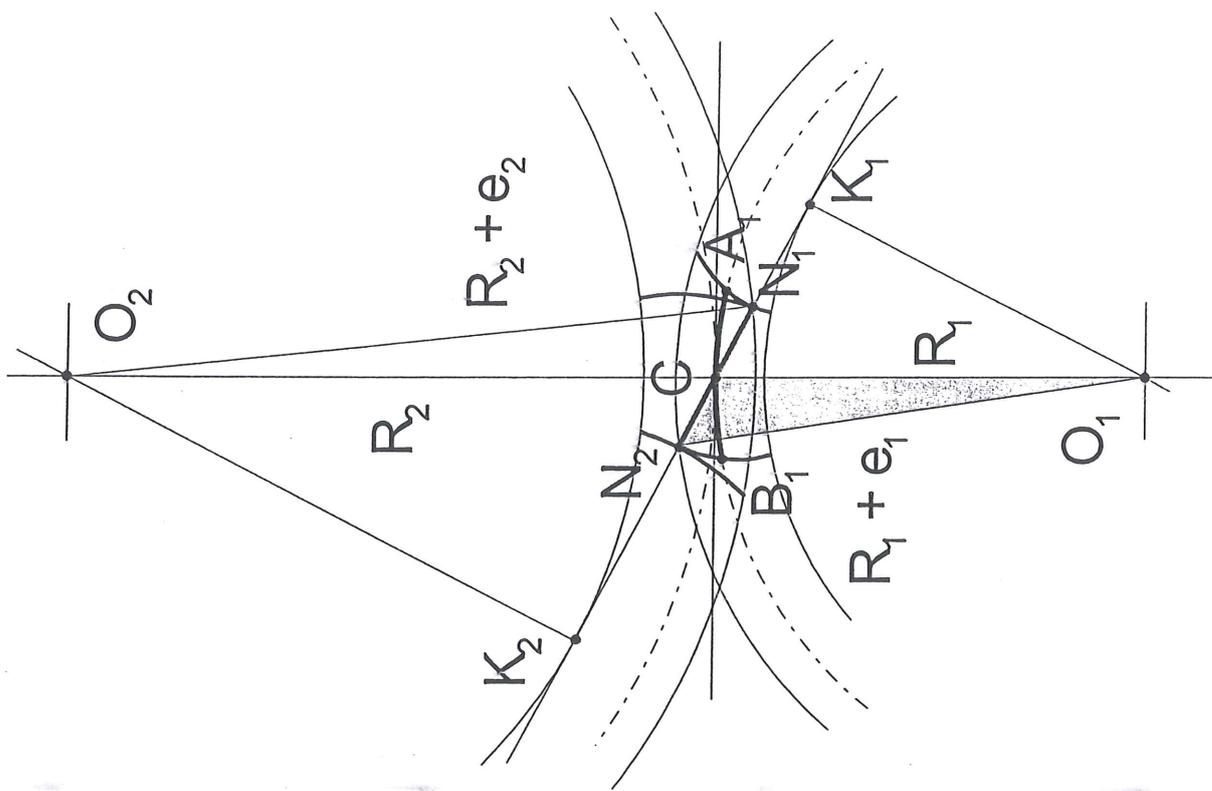


$$CN = LL' = \rho \varphi$$

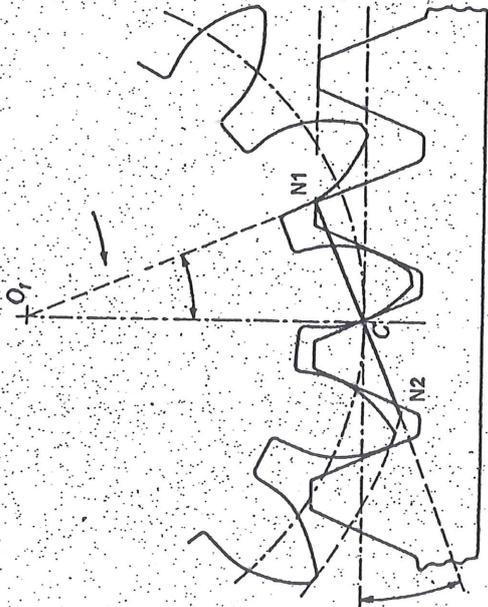
$$CB = R \varphi$$

$$CB = R \varphi = R \frac{CN}{\rho} = \frac{CN}{\cos \alpha}$$

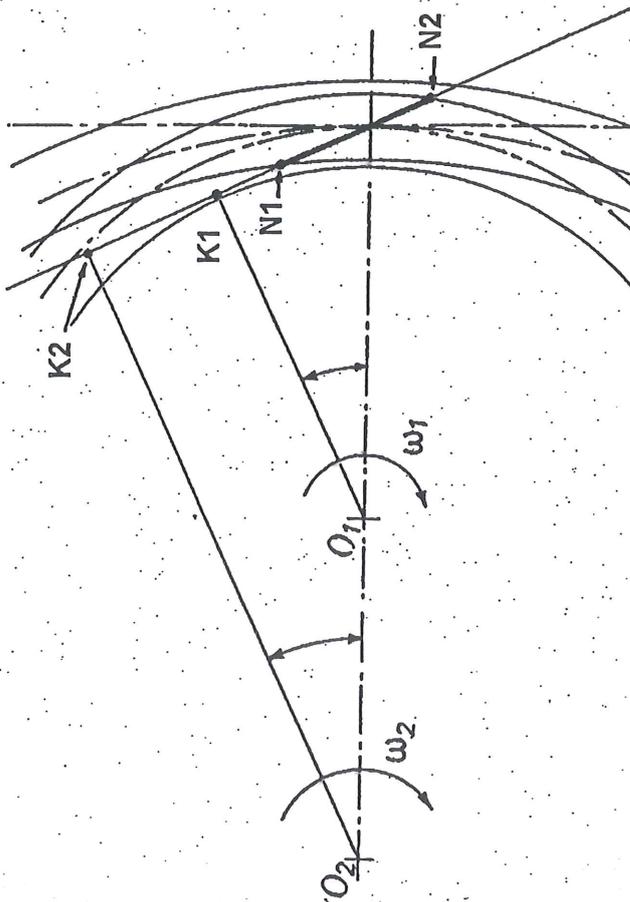
Calcolo del segmento di azione N_1N_2
(Carnot ai triangoli CO_2N_1 e CO_1N_2)



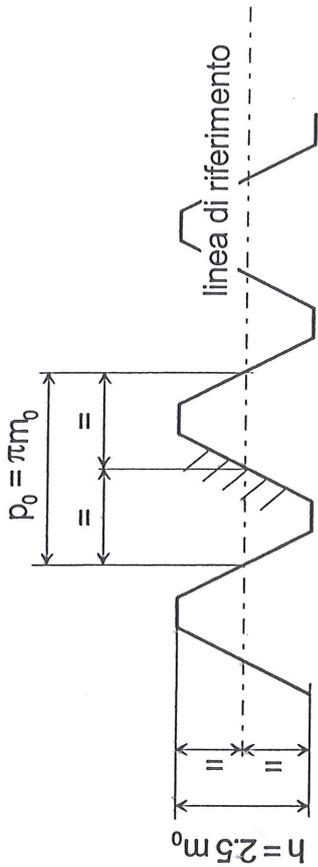
Segmento di azione nell'ingranamento
rocchetto - dentiera



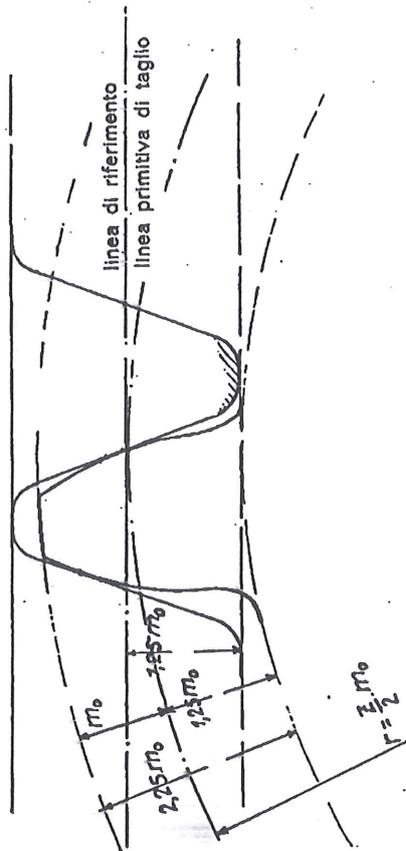
Segmento di azione per un ingranaggio interno



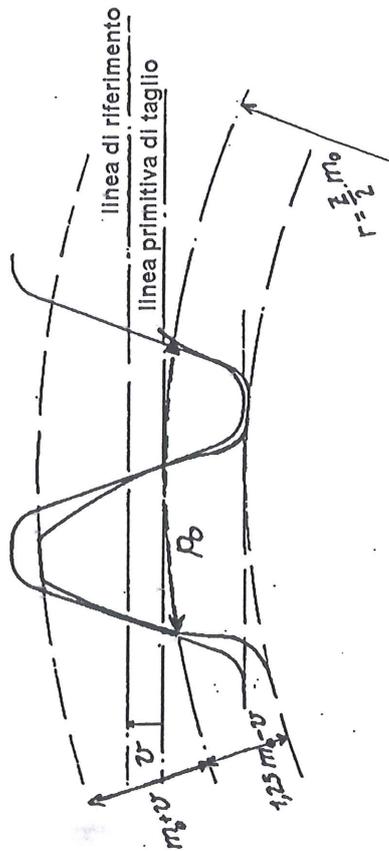
DENTIERA NORMALIZZATA



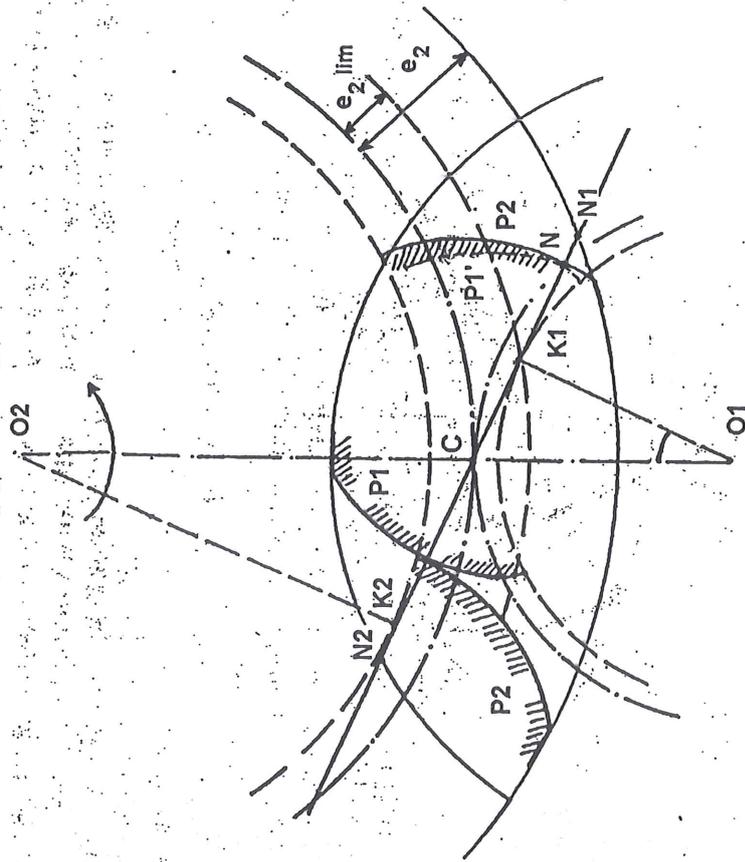
Ruote NORMALI



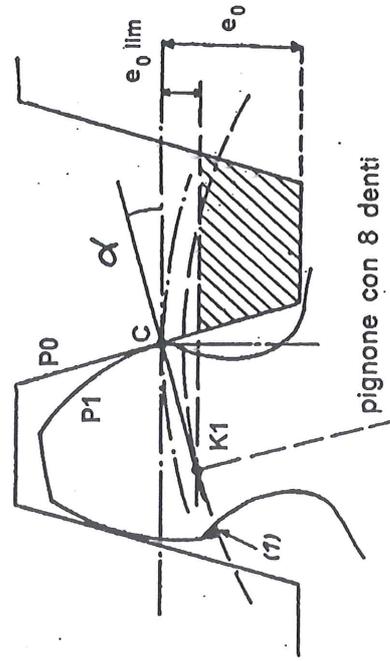
Ruote CORRETTE



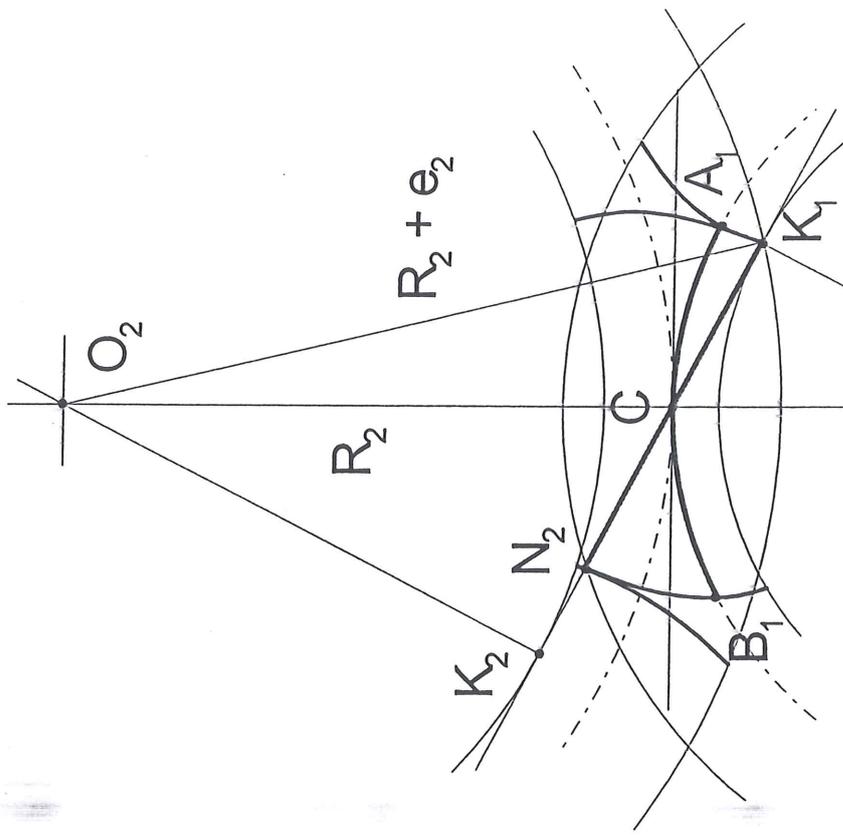
INTERFERENZA



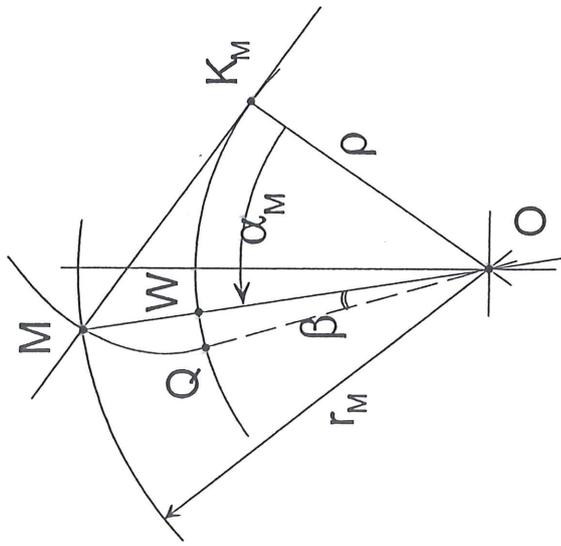
Esempio:
interferenza nel taglio di un pignone con 8 denti



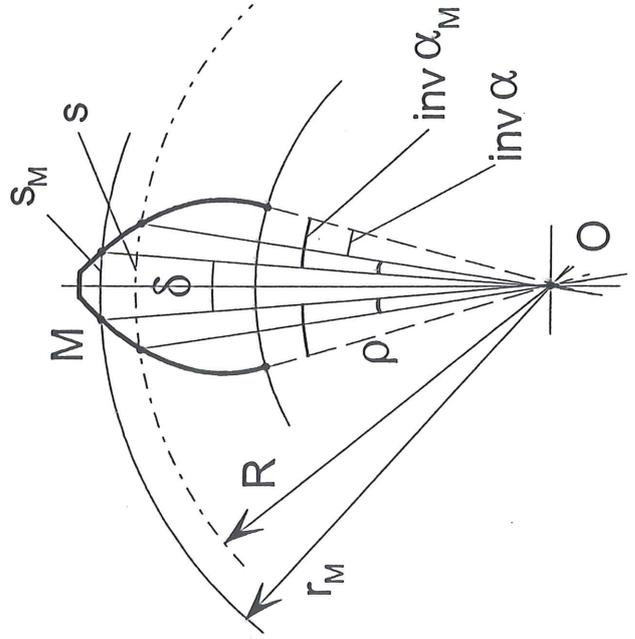
Calcolo del numero minimo di denti
(Carnot al triangolo O_2CK_1)



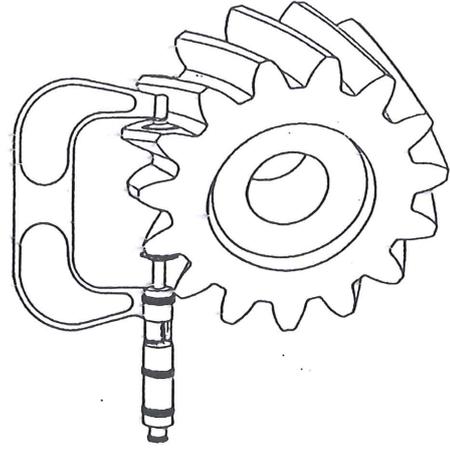
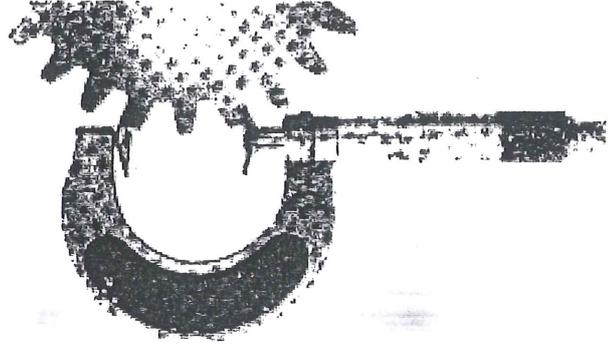
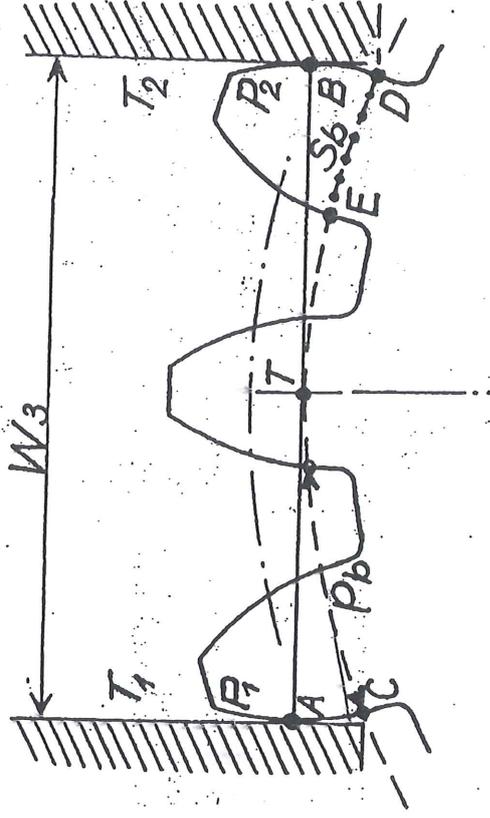
Funzione evolvente



Spessore di dentatura



Misura Wildhaber

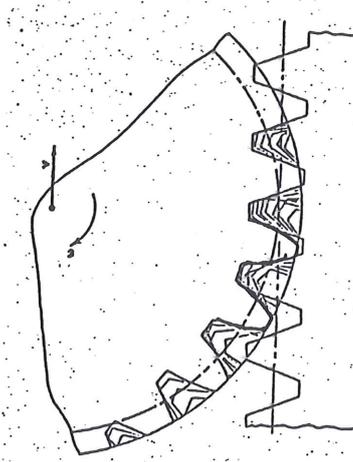
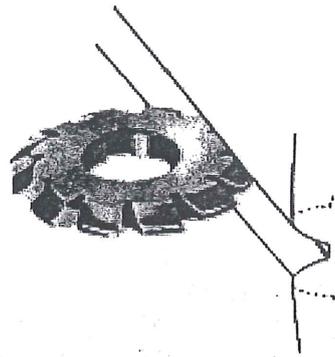


TAGLIO DELLE RUOTE DENTATE

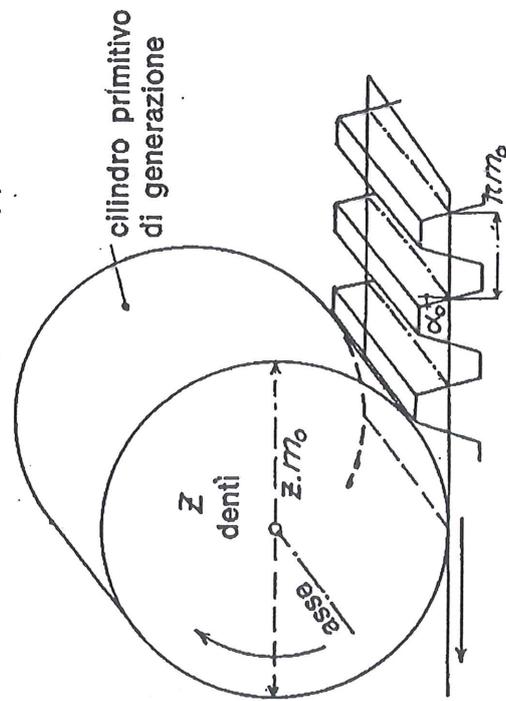
Fusione Stampaggio Estrusione

Lavorazioni alla macchina utensile

Brocciatura
Frese modulari
Generazione per Inviluppo

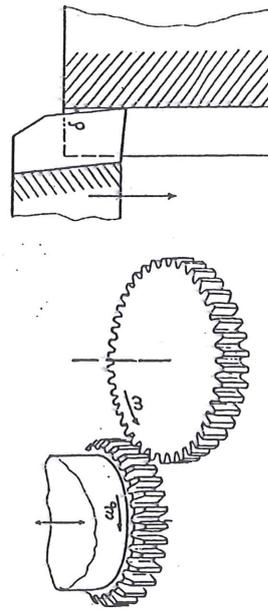
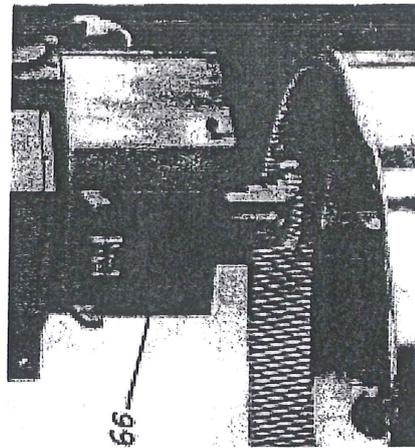
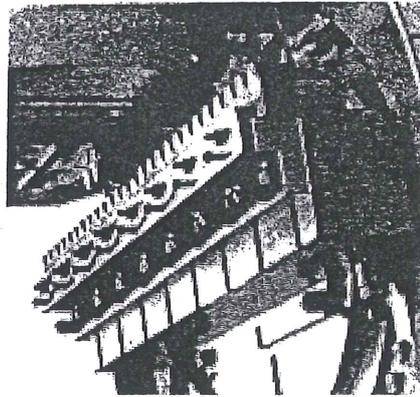
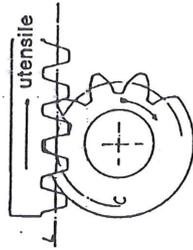
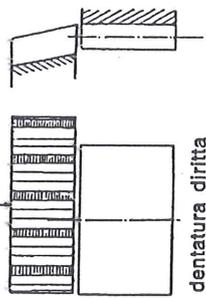
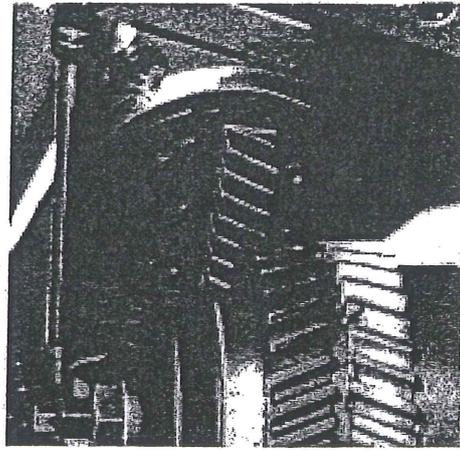


Generazione per Inviluppo

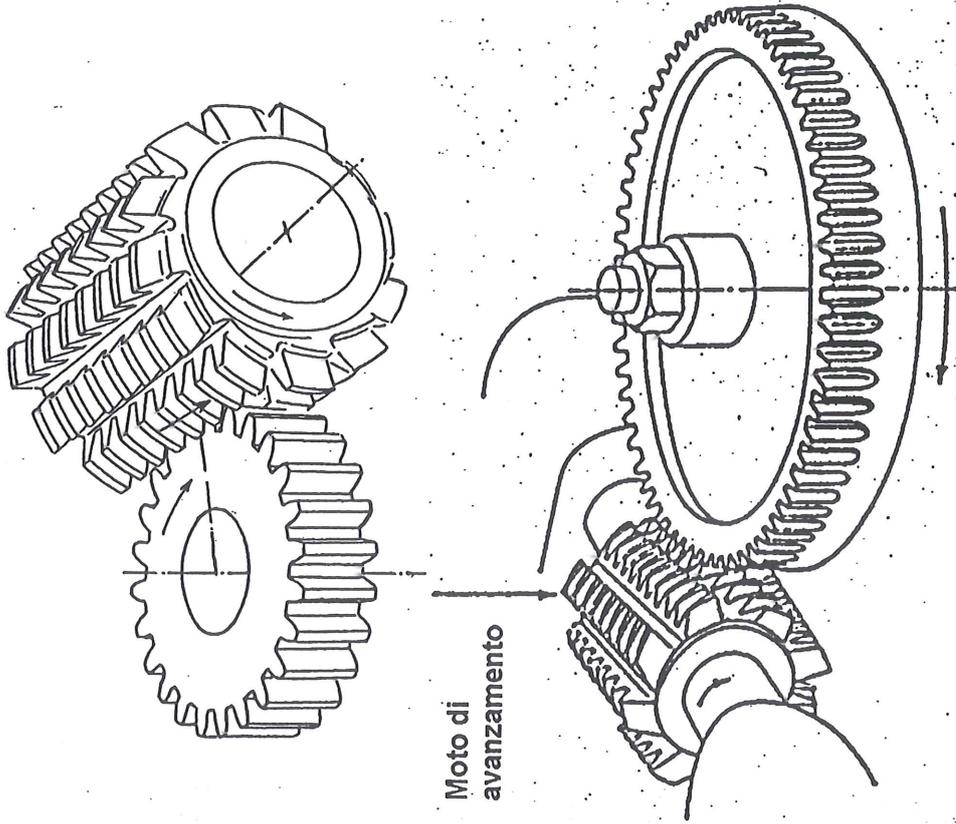


Macchine dentatrici

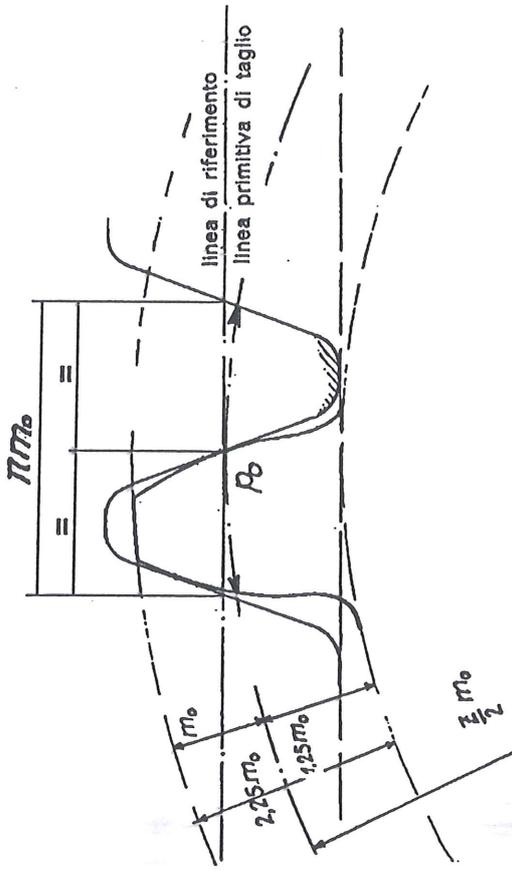
Dentatrici – stozzatrici (moto di taglio traslatorio alterno)



Dentatrici con moto di taglio rotatorio (Dentatrici a creatore)

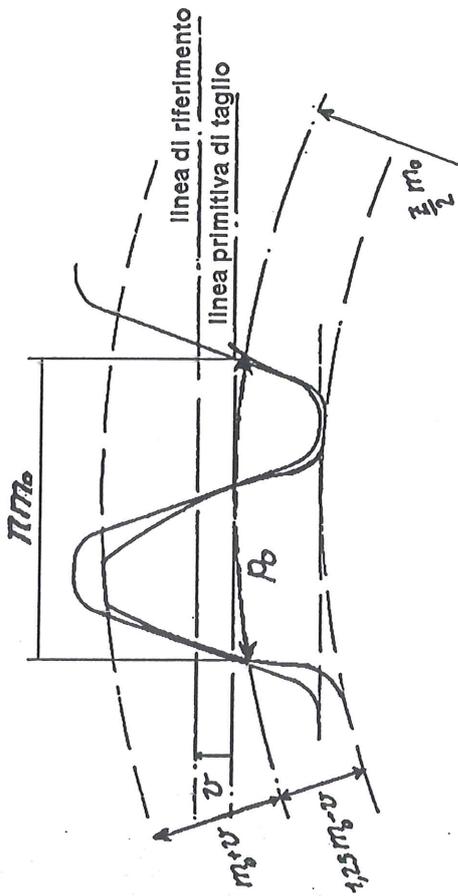


Ruote NORMALI



- Sulla primitiva di taglio
Spessore = Vano = Passo / 2 = $\pi m_0 / 2$
- Addendum = Modulo m_0
- Dedendum = $1.25 m_0$
- Altezza del dente = $2.25 m_0$
- Raggio primitivo di taglio $R = m_0 Z / 2$

Ruote CORRETTE



v = Spostamento della linea di riferimento della dentiera generatrice dalla linea primitiva di taglio

Sulla primitiva di taglio
Spessore ≠ Vano Passo = πm_0

Addendum = $m_0 + v$

Dedendum = $1.25 m_0 - v$

Altezza del dente = $2.25 m_0$

Raggio primitivo di taglio $R = m_0 Z / 2$

INTERASSE di RIFERIMENTO

a = somma dei raggi primitivi di taglio

$$a = R_1 + R_2 = m_0 \frac{(Z_1 + Z_2)}{2}$$

INTERASSE di lavoro

a' = somma dei raggi primitivi di lavoro

$$a' = R_1' + R_2'$$

Per un funzionamento corretto, lo spessore di un dente della ruota 1 deve coincidere con quello del vano di un dente della ruota 2 (e viceversa)

$$\text{Spessore}'_1 = \text{Vano}'_2 \quad \text{Spessore}'_2 = \text{Vano}'_1$$

(gli apici indicano le primitive di lavoro)

$$\text{Spessore}' + \text{Vano}' = \text{Passo di lavoro} = p' = \pi m'$$

$$\text{Spessore}'_1 + \text{Spessore}'_2 = \pi m'$$

Se l'interasse di lavoro coincide con quello di riferimento (le primitive di lavoro coincidono con quelle di taglio)

$$a' = a = R_1 + R_2$$

per avere un funzionamento corretto deve essere

$$S_1' + S_2' = S_1 + S_2 = \text{passo} = \pi m_0$$

S_1 e S_2 sono gli spessori dei denti delle due ruote misurati sulla primitiva di taglio

Quando

$$S_1 + S_2 \neq \pi m_0$$

l'interasse di lavoro differisce da quello di riferimento

Ruote NORMALI

$$\text{Spessore} = \text{Vano} = \text{passo} / 2 = \pi m_0 / 2$$

$$S_1 + \text{Vano}_1 = \text{passo} = \pi m_0$$

$$S_2 + \text{Vano}_2 = \text{passo} = \pi m_0$$

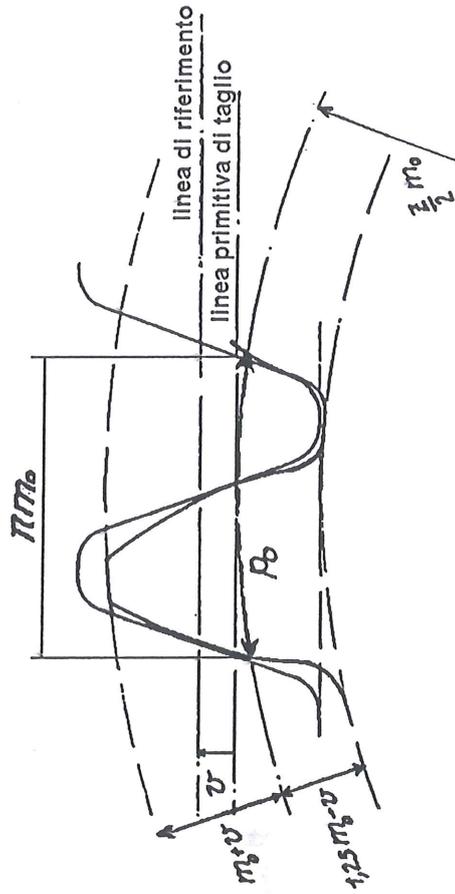
$$S_1 + S_2 = \text{passo} = \pi m_0$$

per un corretto funzionamento l'interasse di lavoro deve coincidere con quello di riferimento

CORREZIONE di Dentatura

Convenzione

Correzione POSITIVA se la linea di riferimento della dentiera generatrice è esterna alla primitiva di taglio della ruota.



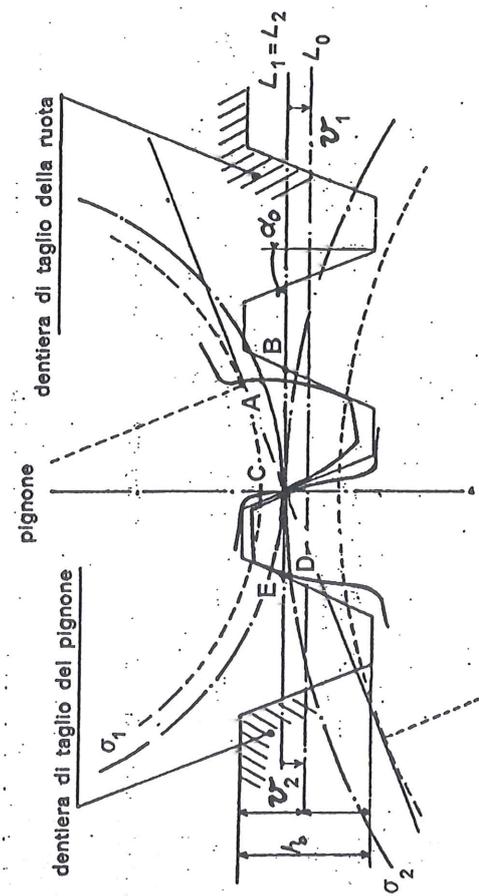
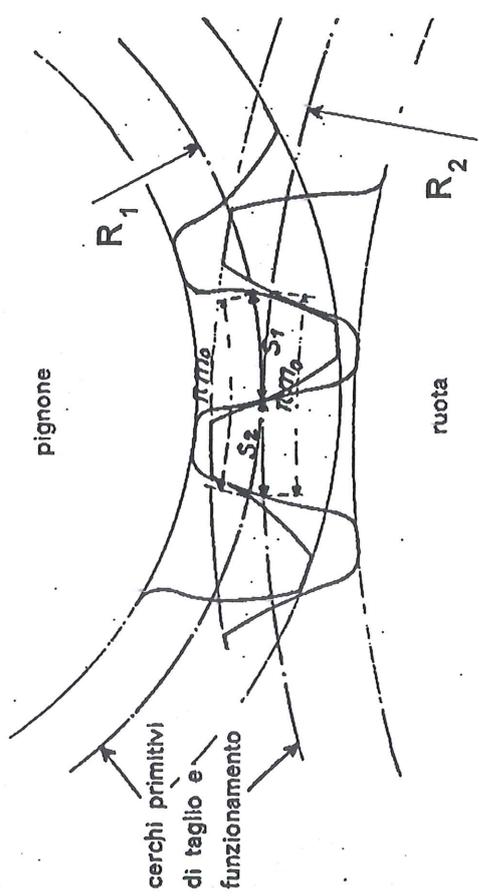
In figura la correzione è positiva

Definizioni

Spostamento di profilo v scostamento della linea di riferimento della dentiera generatrice rispetto alla primitiva di taglio

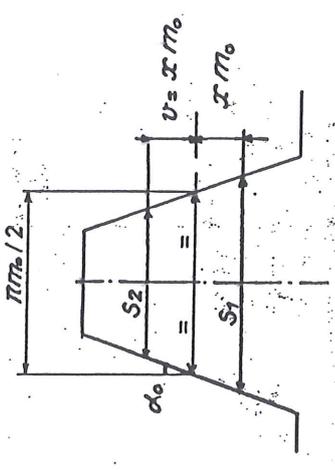
Coefficiente di spostamento $x = v / m_0$

Dentature Corrette SENZA variazione di interasse



$$S_1 = AC = BC$$

$$S_2 = CD = CE$$



$$S_1 = \frac{\pi m_0}{2} + 2v_1 \operatorname{tg} \alpha_0 = m_0 \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_0 \right)$$

$$S_2 = \frac{\pi m_0}{2} - 2|v_2| \operatorname{tg} \alpha_0 = m_0 \left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \operatorname{tg} \alpha_0 \right)$$

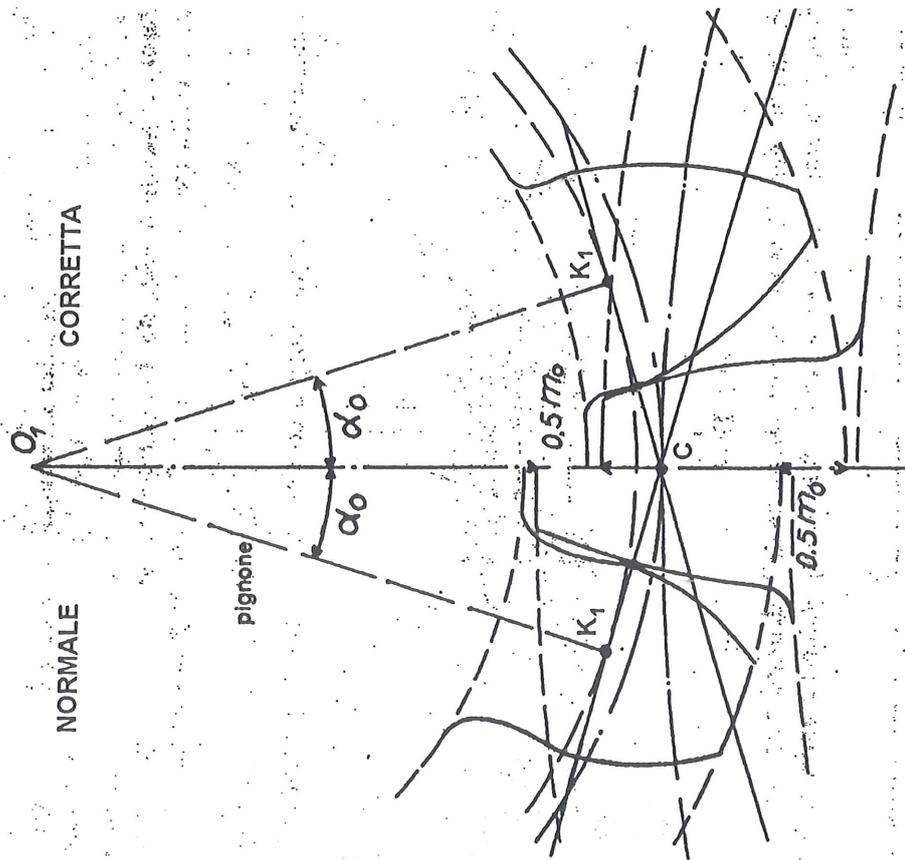
$$S_1 + S_2 = m_0 [\pi + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 (x_1 + x_2)]$$

L'interasse di lavoro coincide con quello di riferimento se:

$$S_1 + S_2 = m_0 \pi \quad \text{cioè solo se} \quad x_1 + x_2 = 0$$

Dentatura corretta con		$v_1 = -v_2 = v$
	Pignone	Ruota
Addendum	$e_1 = m_0 + v$	$e_2 = m_0 - v$
Dedendum	$i_1 = 1.25 m_0 - v$	$i_2 = 1.25 m_0 + v$
Interasse	$a' = a = m_0 (Z_1 + Z_2) / 2$	
Angolo di pressione	$\alpha' = \alpha_0$	

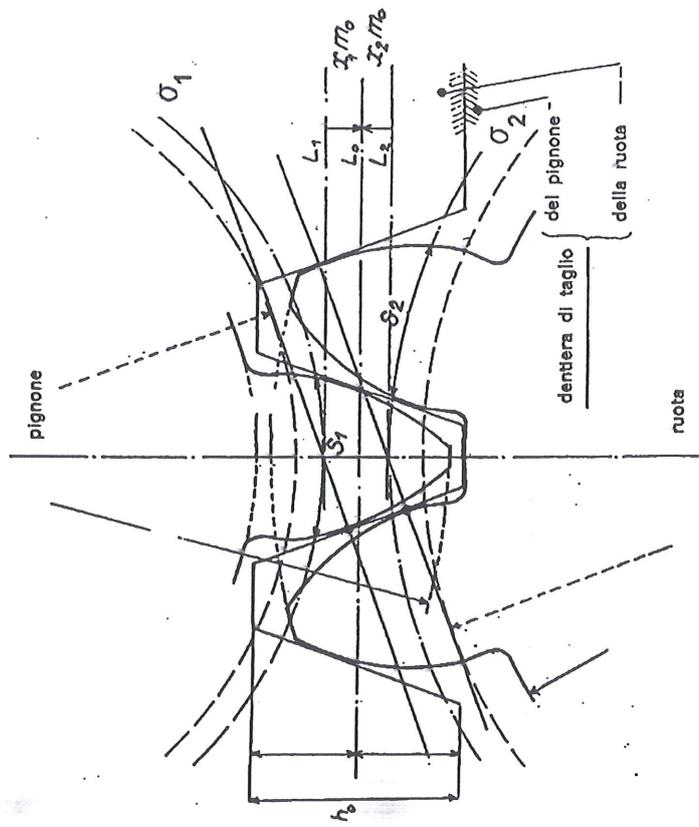
Esempio Variazione forma dei denti a seguito di correzione con $v_1 = -v_2 = v = 0.5 m_0$



Dentature Corrette CON variazione di interasse

$$x_1 + x_2 > 0 \quad S_1 + S_2 > m_0\pi \quad a' > a$$

$$x_1 + x_2 < 0 \quad S_1 + S_2 < m_0\pi \quad a' < a$$



Sulle circonferenze primitive di taglio si ha:

$$R_1 = \frac{m_0 Z_1}{2} \quad S_1 = m_0 \left(\frac{\pi}{2} + 2 x_1 \operatorname{tg} \alpha_0 \right)$$

$$R_2 = \frac{m_0 Z_2}{2} \quad S_2 = m_0 \left(\frac{\pi}{2} + 2 x_2 \operatorname{tg} \alpha_0 \right)$$

Inoltre

$$a_1 = R_1 + R_2 + m_0(x_1 + x_2) = a + m_0(x_1 + x_2)$$

Con l'interasse a_1 non si ha contatto tra i denti.
E' necessario avvicinare le due ruote.

$$a_1 > a'$$

La variazione di interasse a seguito di correzione è sempre minore della somma degli spostamenti di profilo.

$$a' - a < v_1 + v_2 = m_0(x_1 + x_2)$$

Determinazione dell'interasse di lavoro a'

Sulle primitive di lavoro gli spessori valgono:

$$S_1' = R_1' \left[\frac{S_1}{R_1} + 2(\text{inv}\alpha_0 - \text{inv}\alpha') \right]$$

$$S_2' = R_2' \left[\frac{S_2}{R_2} + 2(\text{inv}\alpha_0 - \text{inv}\alpha') \right]$$

Inoltre:

$$S_1' + S_2' = \text{passo di lavoro} = \pi m' = \frac{2\pi R_1'}{Z_1} = \frac{2\pi R_2'}{Z_2}$$

$$\rho = R \cos\alpha_0 = R' \cos\alpha' \quad R' = R \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha'}$$

$$S_1' + S_2' = \pi m' = \pi m_0 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha'}$$

$$2 \text{tg}\alpha_0(x_1 + x_2) + (Z_1 + Z_2)(\text{inv}\alpha_0 - \text{inv}\alpha') = 0$$

$$\text{inv}\alpha' = \text{inv}\alpha_0 + 2 \text{tg}\alpha_0 \frac{x_1 + x_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$a' = a \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha'}$$

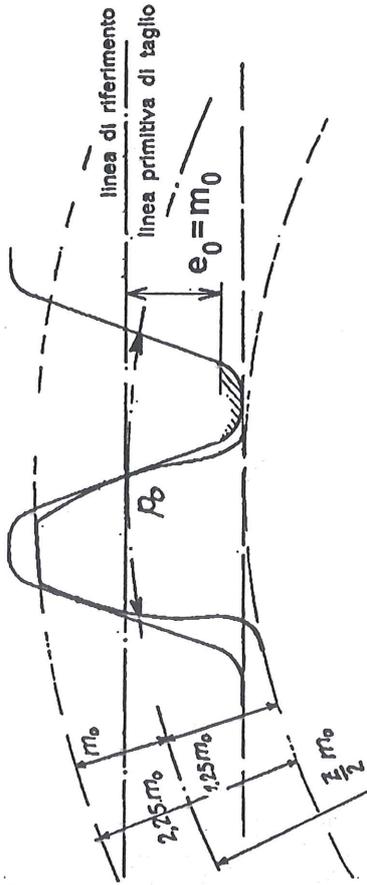
Problema diretto

Dati	Trovare
<ul style="list-style-type: none"> • Numeri di denti Z_1 e Z_2 • Modulo e angolo di pressione della dentiera generatrice m_0 e α_0 • Somma degli spostamenti $x_1 + x_2$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Interasse di lavoro a' • Angolo di pressione di lavoro α'

Problema inverso

Dati	Trovare
<ul style="list-style-type: none"> • Numeri di denti Z_1 e Z_2 • Modulo e angolo di pressione della dentiera generatrice m_0 e α_0 • Assegnato l'interasse di lavoro a' 	<ul style="list-style-type: none"> • Angolo di pressione di lavoro α' • Somma degli spostamenti $x_1 + x_2$

Correzione di dentatura per evitare interferenza



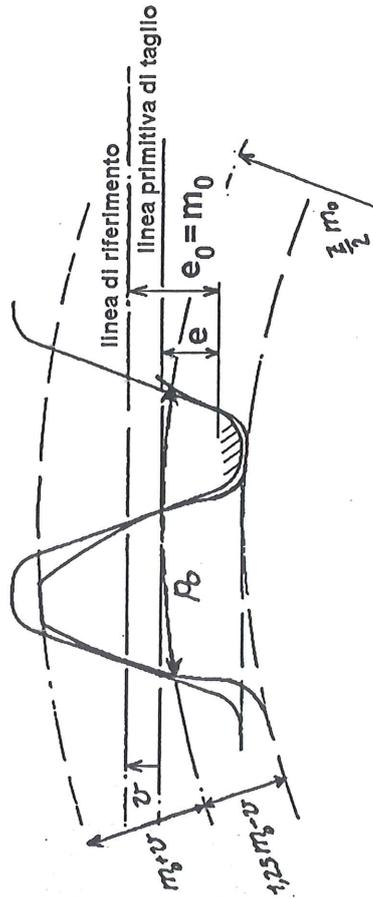
In condizioni di riferimento

$$Z \geq Z_{limrif} = \frac{2}{\sin^2 \alpha_0} \frac{e_0}{m_0} = \frac{2}{\sin^2 \alpha_0}$$

$$Z_{limrif} = Z_0 = \frac{2}{\sin^2 \alpha_0} \quad \frac{e_0}{m_0} = \frac{Z_0 \sin^2 \alpha_0}{2}$$

Se si effettua uno spostamento di profilo

$$Z \geq Z_{lim} = \frac{2}{\sin^2 \alpha_0} \frac{e}{m_0} \quad \frac{e}{m_0} \leq \frac{Z \sin^2 \alpha_0}{2}$$



Se lo spostamento di profilo è pari a $v = x m_0$, si ha ($v = e_0 - e$):

$$\frac{v}{m_0} = \frac{e_0}{m_0} - \frac{e}{m_0} \geq \frac{e_0}{m_0} - \frac{Z \sin^2 \alpha_0}{2}$$

$$\frac{v}{m_0} \geq \frac{Z_0 \sin^2 \alpha_0}{2} - \frac{Z \sin^2 \alpha_0}{2} = (Z_0 - Z) \frac{\sin^2 \alpha_0}{2} = \frac{Z_0 - Z}{Z_0}$$

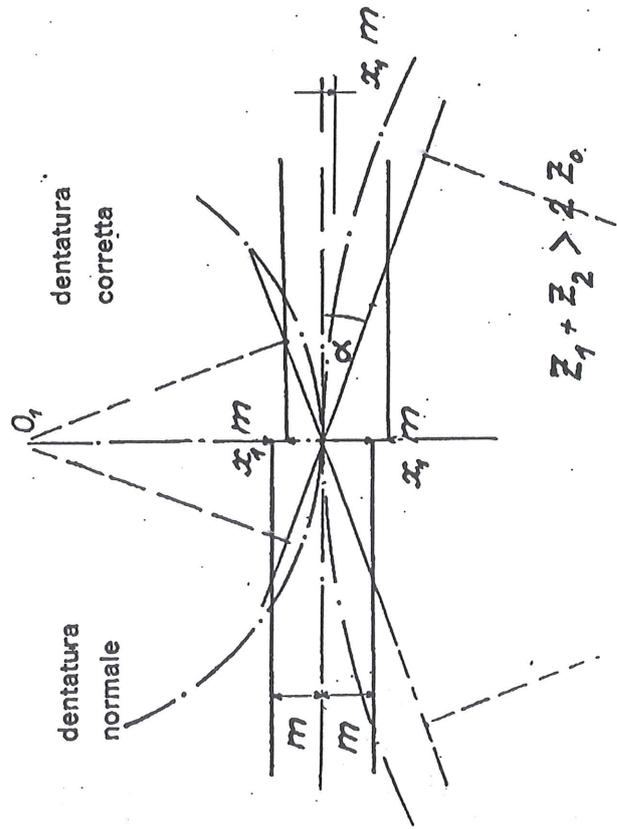
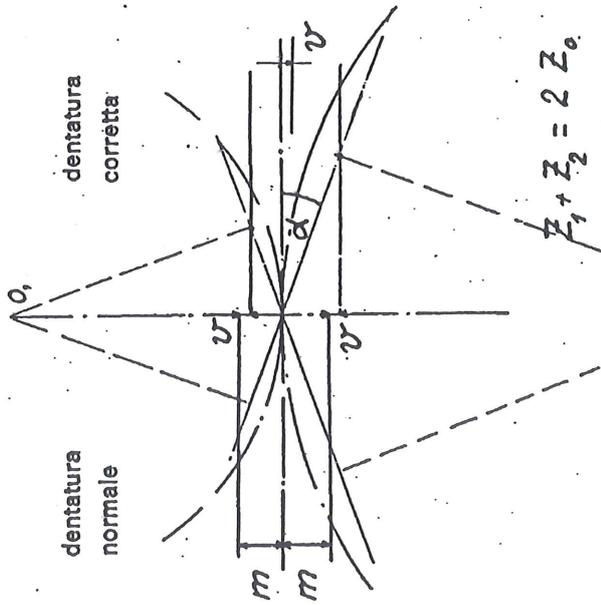
$$\frac{v}{m_0} = x \geq \frac{Z_0 - Z}{Z_0}$$

$$x_1 \geq \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0} \quad x_2 \geq \frac{Z_0 - Z_2}{Z_0}$$

$$x_1 + x_2 \geq \frac{2Z_0 - (Z_1 + Z_2)}{Z_0}$$

Si hanno due casi:

- 1) $Z_1 + Z_2 \geq 2Z_0$ $x_1 + x_2 = 0$ $x_1 = -x_2$
 $x_1 + x_2 \neq 0$
- 2) $Z_1 + Z_2 < 2Z_0$ $x_1 + x_2 \neq 0$ $(x_1 + x_2) > 0$



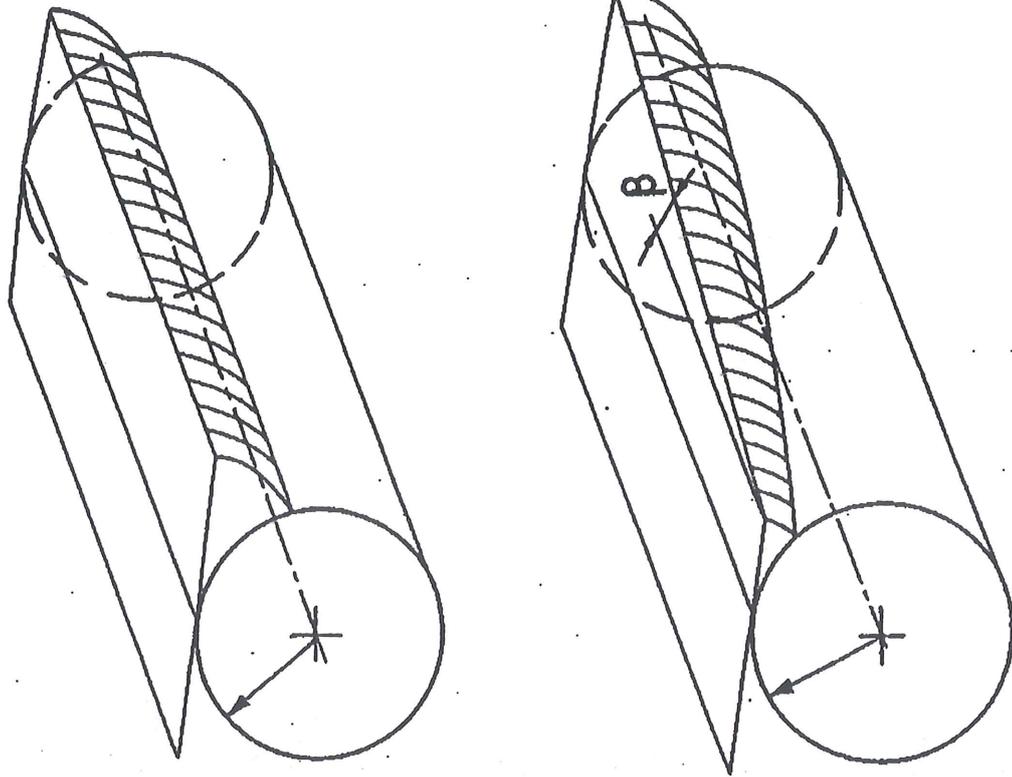
Modifica della forma dei denti a seguito di correzione

	$x = -0.6$	$x = -0.3$	$x = 0$	$x = 0.3$	$x = 0.6$
$z = 14$					
$z = 20$					
$z = 50$					

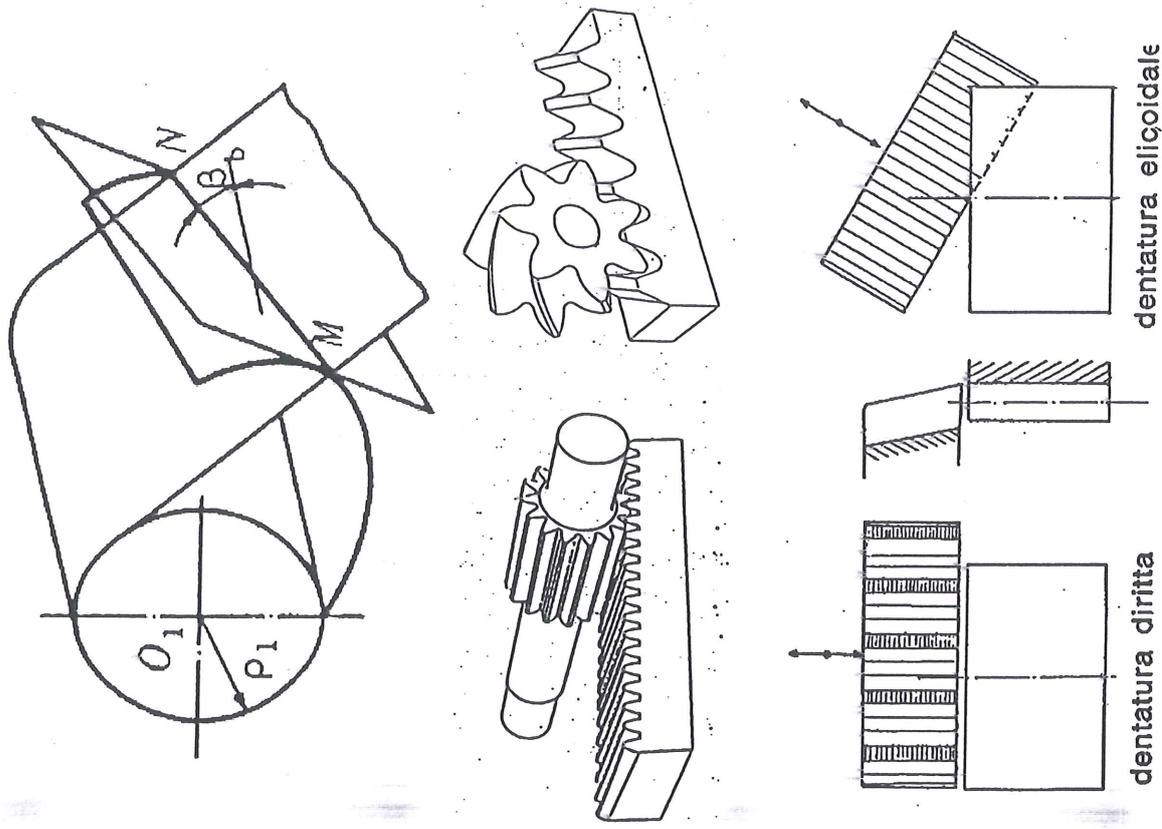
Una correzione positiva:

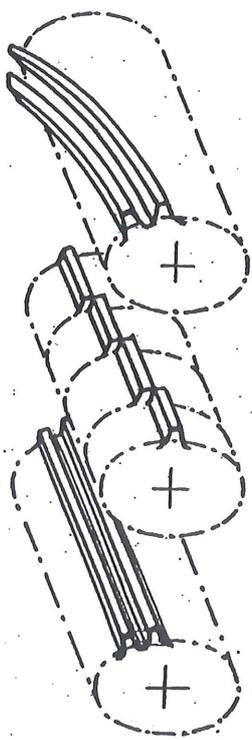
- allontana dalla condizione di interferenza
- migliora la resistenza a flessione al piede
- riduce le pressioni di contatto (aumenta la curvatura del profilo al piede)
- il dente ha forma più appuntita

Ruote Dentate
Ruote dentate cilindriche a DENTI ELICOIDALI



Ruote Dentate
 I fianchi dei denti della dentiera generatrice sono piani

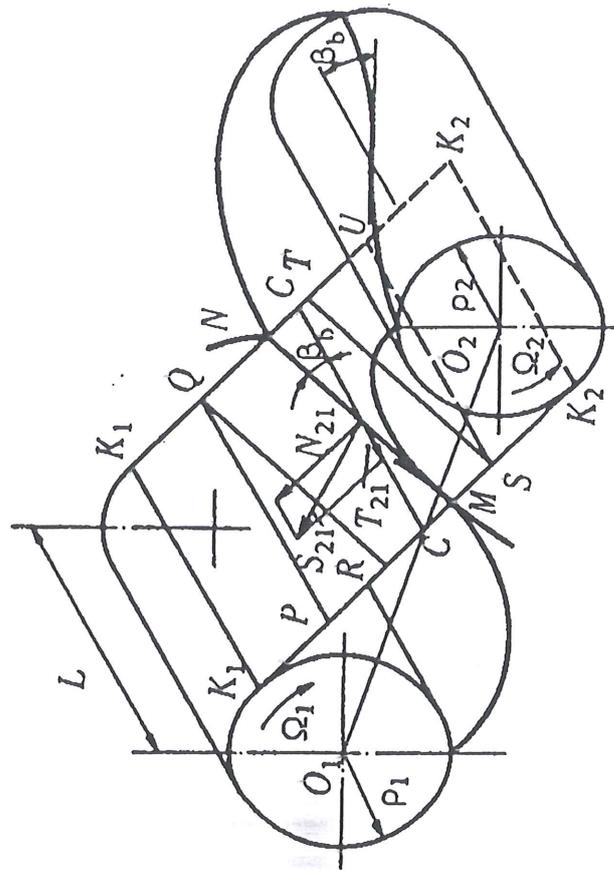
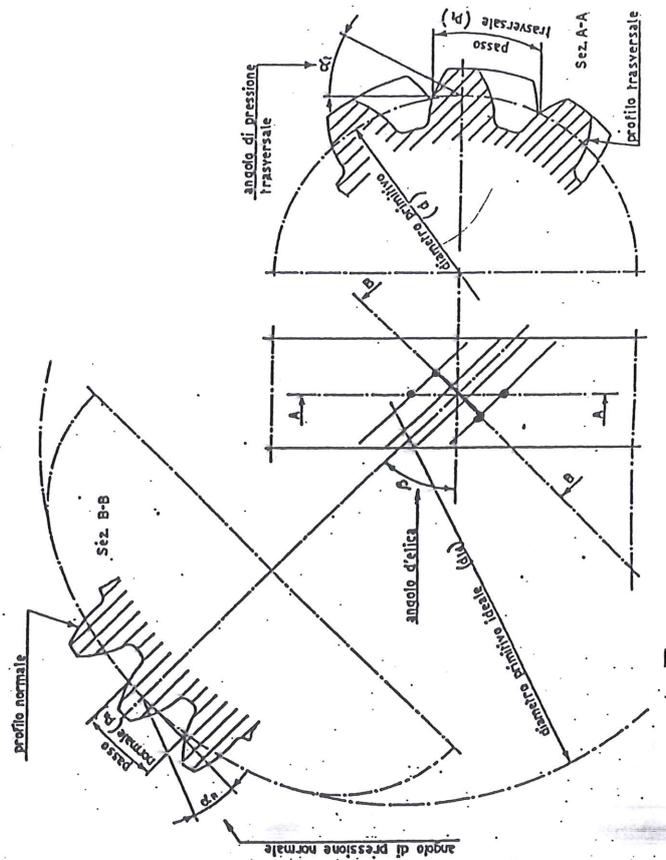
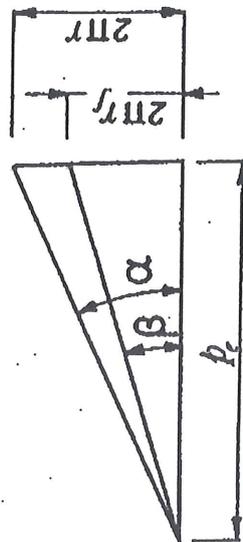
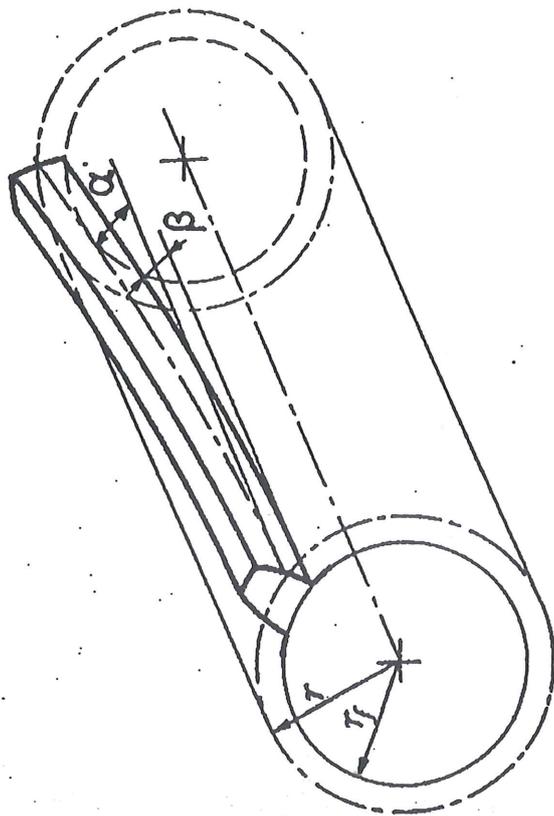


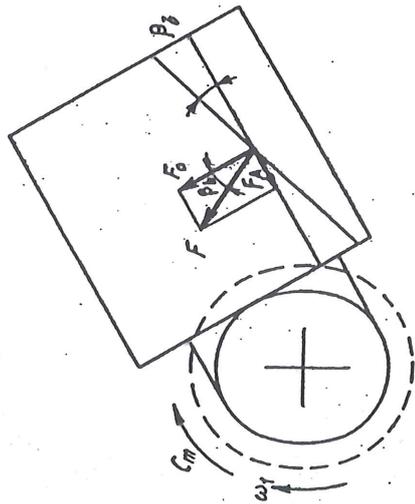


Ruota a denti dritti

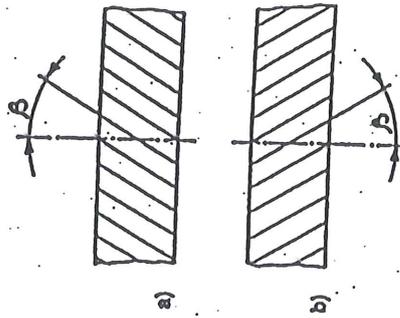
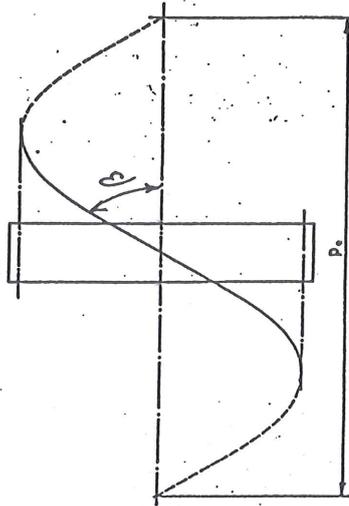
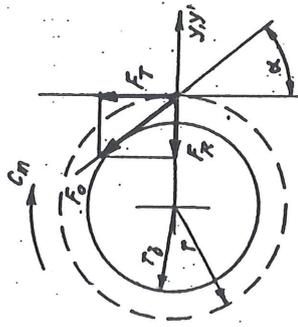
Ruota a denti gradini

Ruota a denti elicoidali



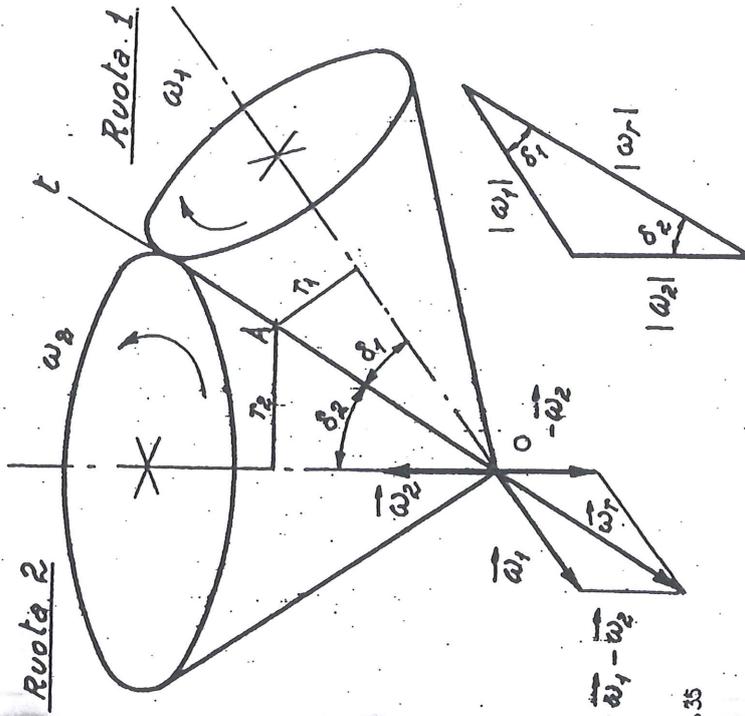


Sezione frontale

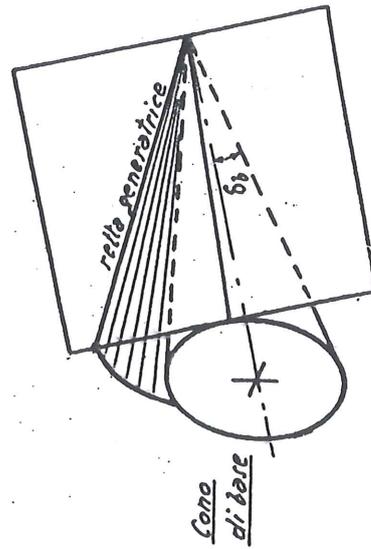


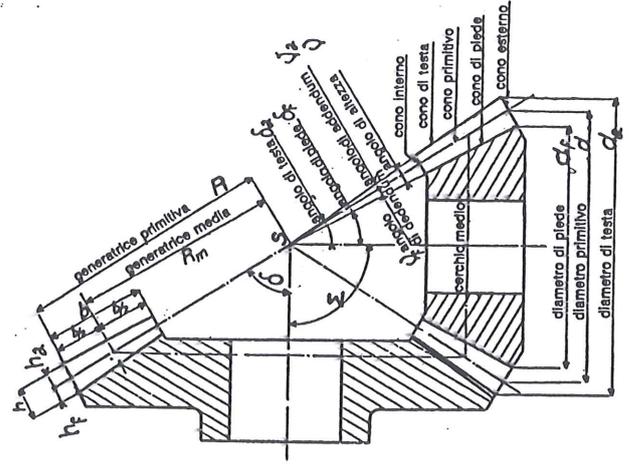
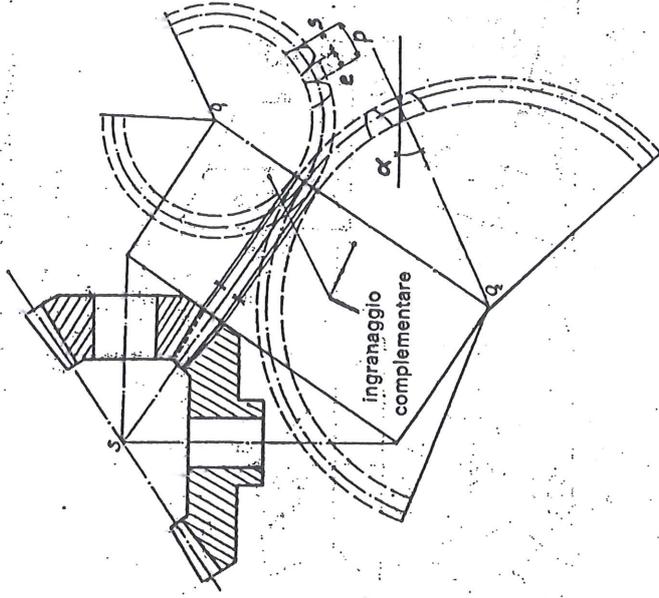
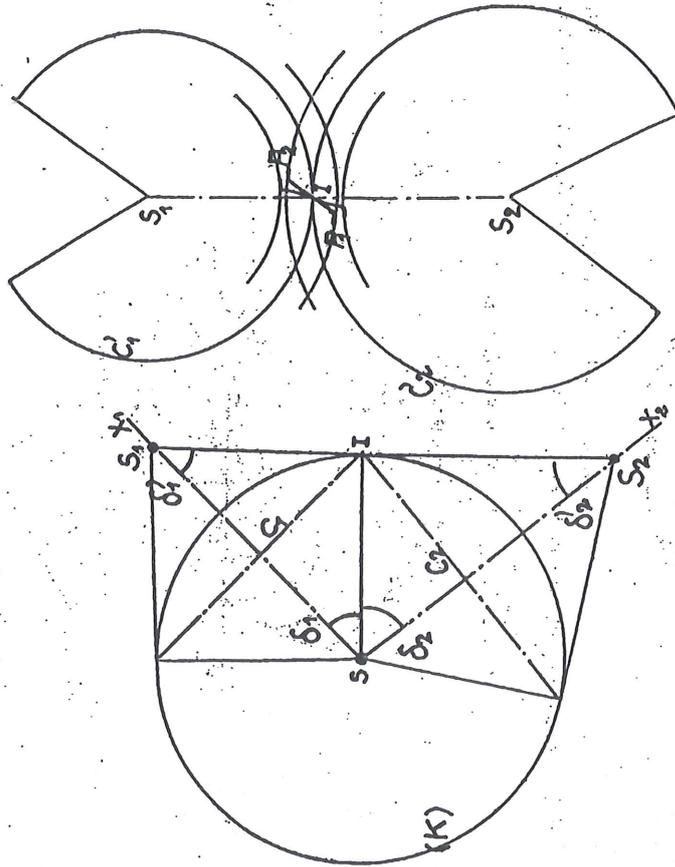
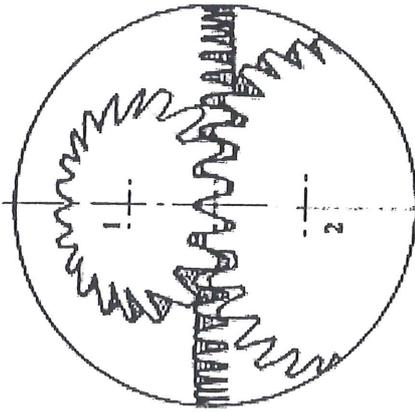
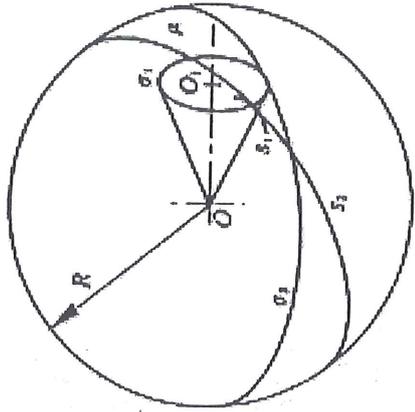
(a) elica destra, (b) elica sinistra.

Ruote dentate CONICHE

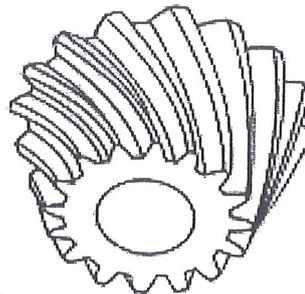
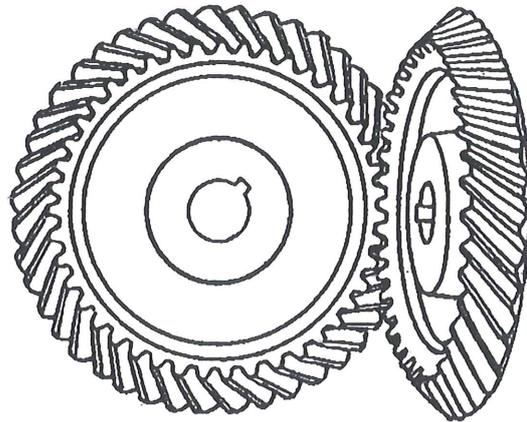
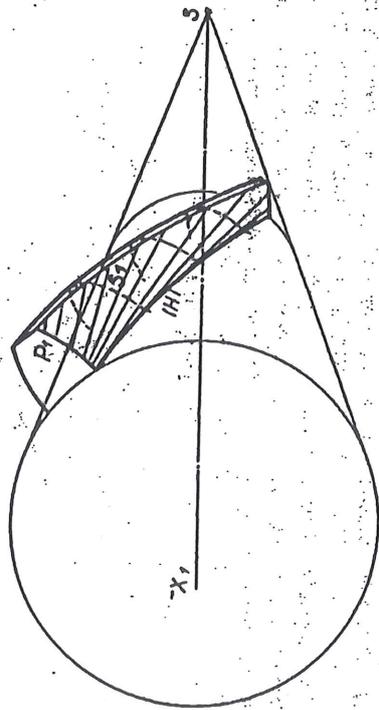


9.35



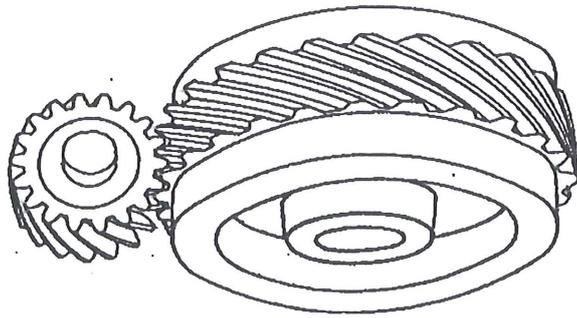


Ruote Dentate Coniche a Denti curvi

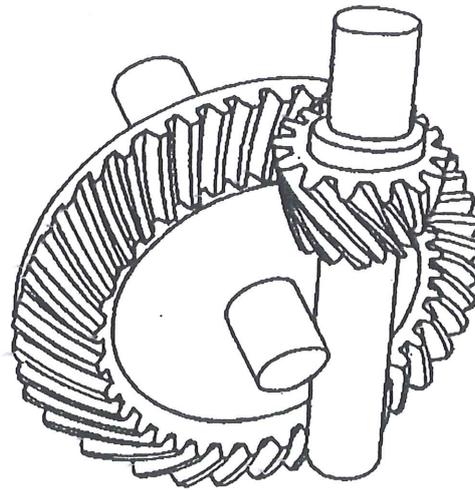


Trasmissione del moto tra assi SGHEMBI con Ruote Dentate

ingranaggio sghembo elicoidale

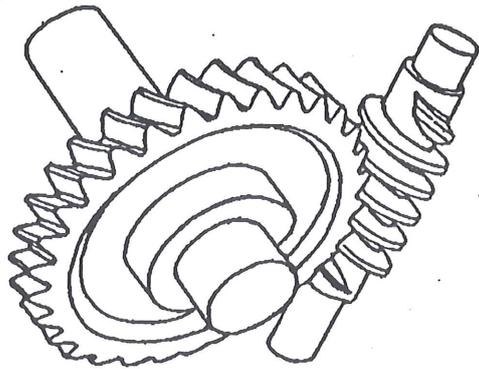


ingranaggio ipoide

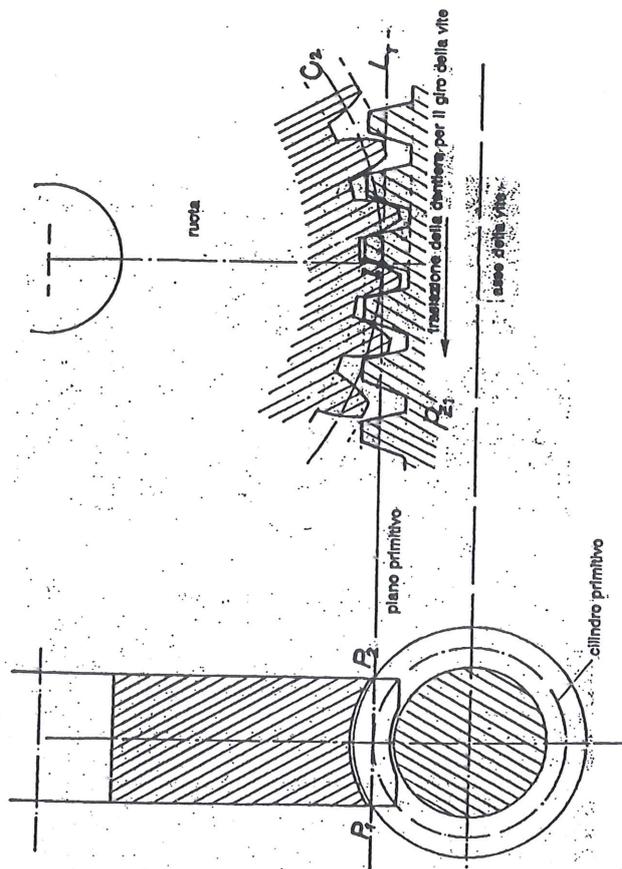


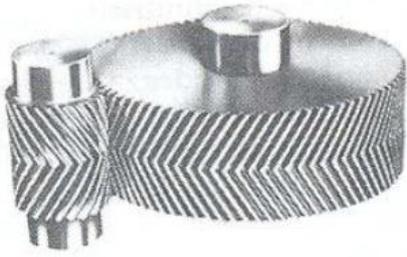
Ruote Dentate
Ingranaggio Vite senza fine – Ruota elicoidale

Ingranaggio a vite



$$i = \frac{Z}{z}$$





Dentature biellicoidali: le opposte spinte assiali si annullano



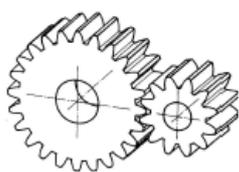
Coppie di ruote coniche: a) con denti a spirale, b) ipoidi, con assi di rotazione giacenti in piani ortogonali ma non concorrenti.



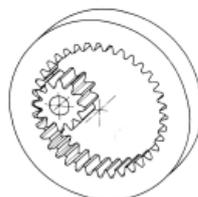
Tabella delle caratteristiche della dentatura cilindrica elicoidale (per la dentatura cilindrica a denti dritti la tabella è eguale, omettendo i dati riguardanti l'elica)

Modulo normale	m_n	5
Numero denti	z	44
Dentiera di riferimento		UNI 6587-69
Angolo dell' elica	β	23°33'23"
Senso dell'elica		destro
Diametro primitivo	d	240
Coefficiente di spostamento		0.259
Spessore del dente: -corda -altezza	s h_a	8.88 ^{-0.04} 6.34 ^{-0.06}
Grado di precisione		*
Numero di denti ruota coniugata (disegno N°)	z	43
Interasse nominale di funzionamento	a^1	240
Gioco normale dell'ingranaggio	j_n	0.08±0.12

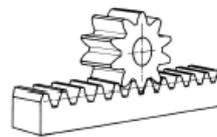
Si riportano in questa trasparenza alcune tipologie di ruote dentate tra le più comuni.



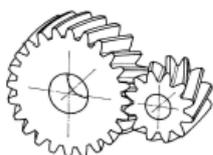
Ruote **cilindriche a denti dritti** (ingranaggio esterno). Trasmissione del moto tra **assi paralleli**.



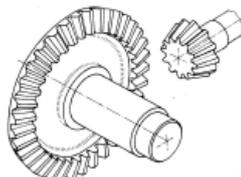
Ruote **cilindriche a denti dritti** (ingranaggio interno). Trasmissione del moto tra **assi paralleli**.



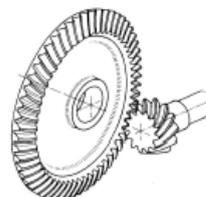
Coppia **pignone/dentiera** (meccanismo a **cremagliera**). Trasformazione **da moto rotatorio a moto traslatorio**.



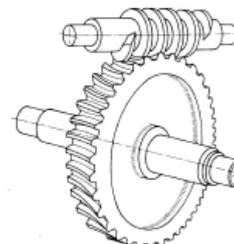
Ruote **cilindriche a denti elicoidali** (ingranaggio esterno). Trasmissione del moto tra **assi paralleli**.



Ruote **coniche a denti dritti** (ingranaggio esterno). Trasmissione del moto tra **assi incidenti**.



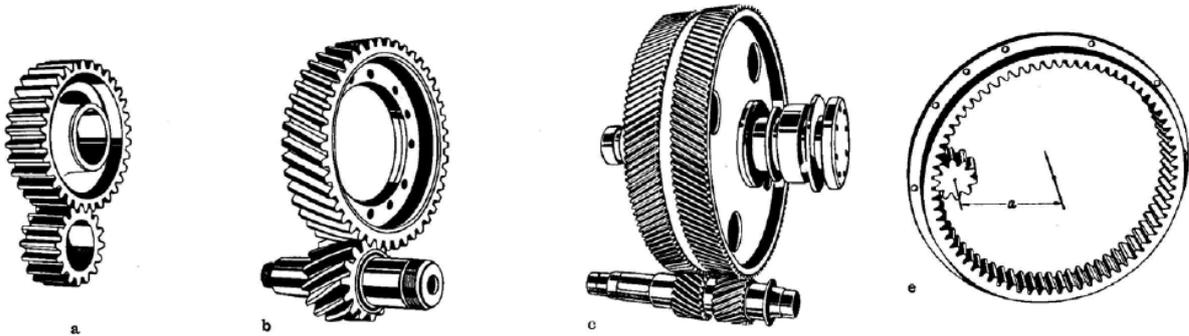
Ruote **iperboliche** (ingranaggio esterno). Trasmissione del moto tra **assi sghembi**.



Coppia vite senza fine/ruota elicoidale. Trasmissione del moto tra **assi sghembi**.

✓ **Ruote dentate**

➤ **Ingranaggi cilindrici**

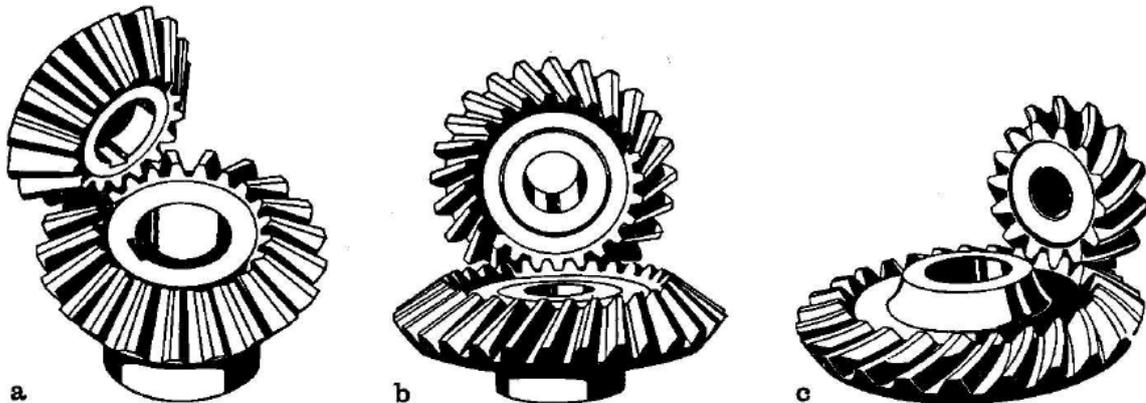


Le ruote a denti elicoidali hanno un funzionamento più dolce e più silenzioso rispetto a quelle a denti dritti, MA generano nel funzionamento anche una spinta assiale (cioè una forza diretta lungo l'albero).

Se ne deve tenere conto quando si sceglie la tecnica di montaggio. Le ruote a doppia dentatura (c) generano spinte assiali uguali e contrarie, quindi a risultante nulla.

✓ **Ruote dentate**

➤ **Ingranaggi conici**



Durante il funzionamento si genera comunque una forza che tende a separare le due ruote: bisogna tenerne conto quando si sceglie la modalità di montaggio

✓ Ruote dentate

➤ Forme costruttive

• Quando la ruota è molto piccola (rocchetto) si può ricavare direttamente sull'albero

- Vantaggi: Non si ha la lavorazione di fori come anche il collegamento albero-pignone; rigidità elevata, nessuna posizione inclinata della dentatura rispetto all'albero a causa di forze assiali.
- Svantaggi: Possibilità di serraggio, imbocco della fresa ed uscita. Non è possibile la sostituzione del solo pignone (caso di guasto, variazione del rapporto di trasmissione).

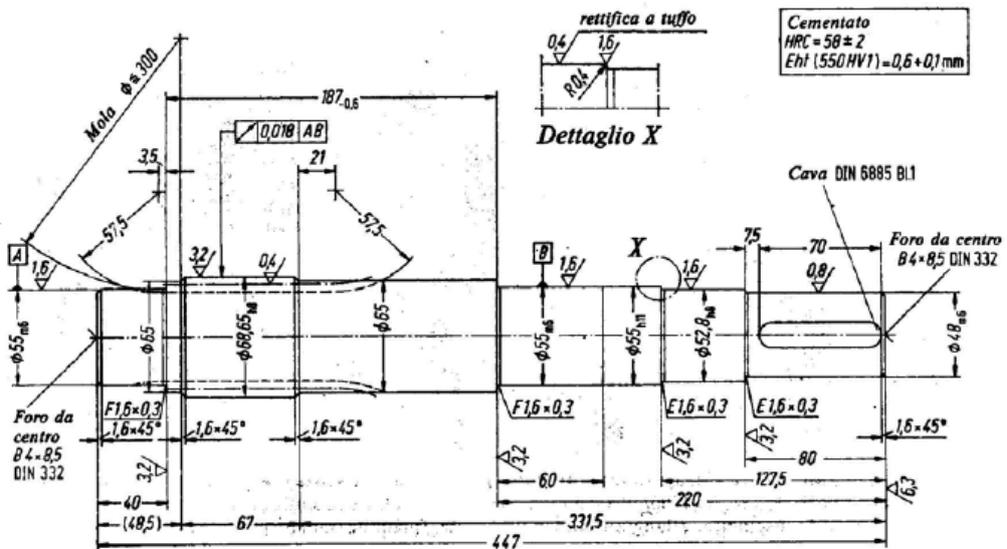
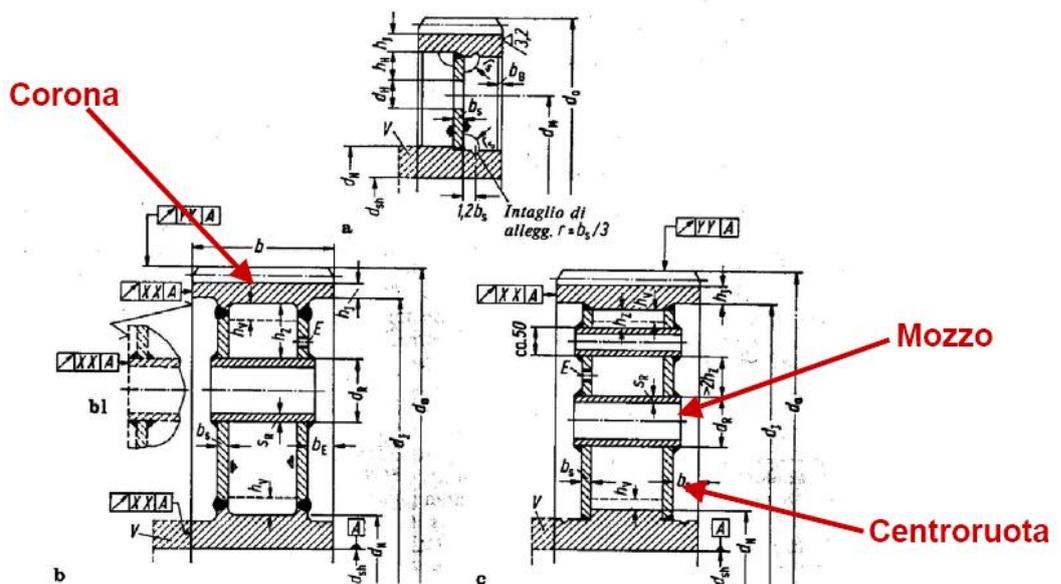


Fig. 22.2/21. Disegno d'ufficio di albero-pignone (Flender, Bocholt). Materiale 16MnCr5. $I = 0,00422 \text{ kgm}^2$; $m = 9,2 \text{ kg}$; rugosità R_a in μm ; superfici non contrassegnate $R_a < 12,5 \mu\text{m}$. Centraggi sec. Din 332, scarico sec. DIN 509

✓ Ruote dentate

➤ Forme costruttive

• Quando la ruota è molto grande si può ottenere per saldatura del mozzo e centraruota alla corona

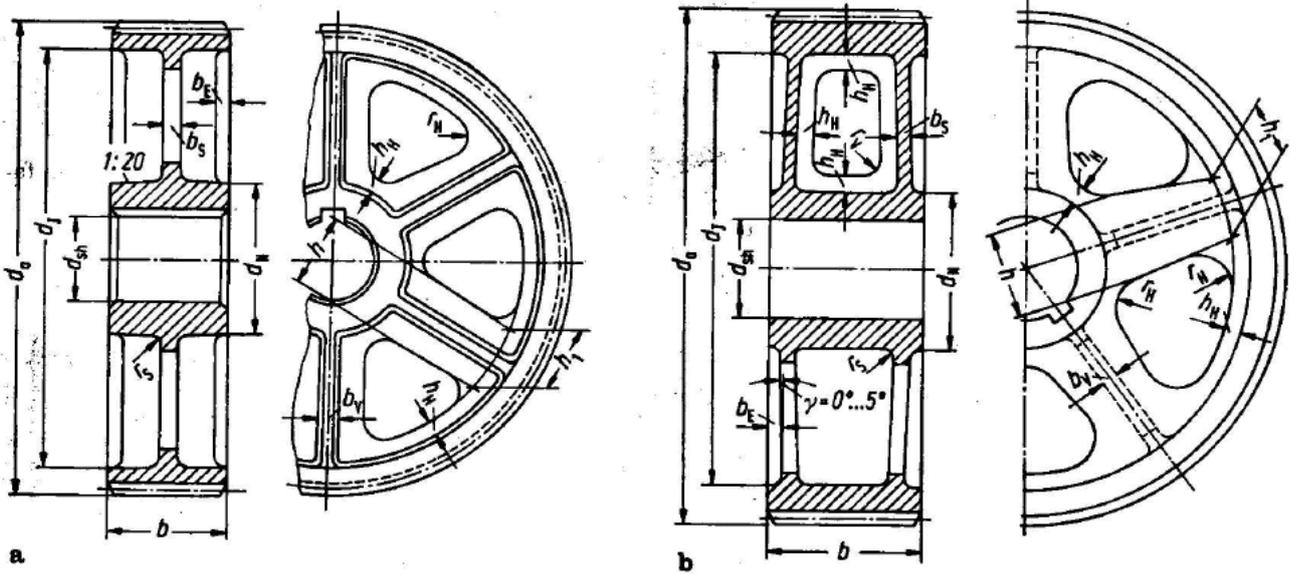


2.2/15. Dimensioni di corpi di ruota saldati. Conformazione dei cordoni di saldatura sec. la soletta

✓ Ruote dentate

➤ Forme costruttive

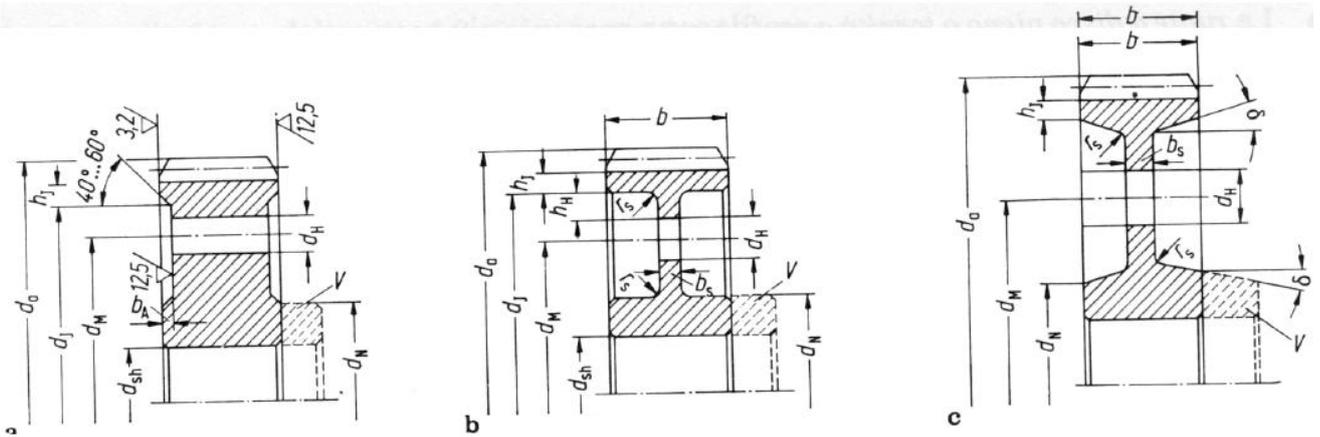
- Per fusione



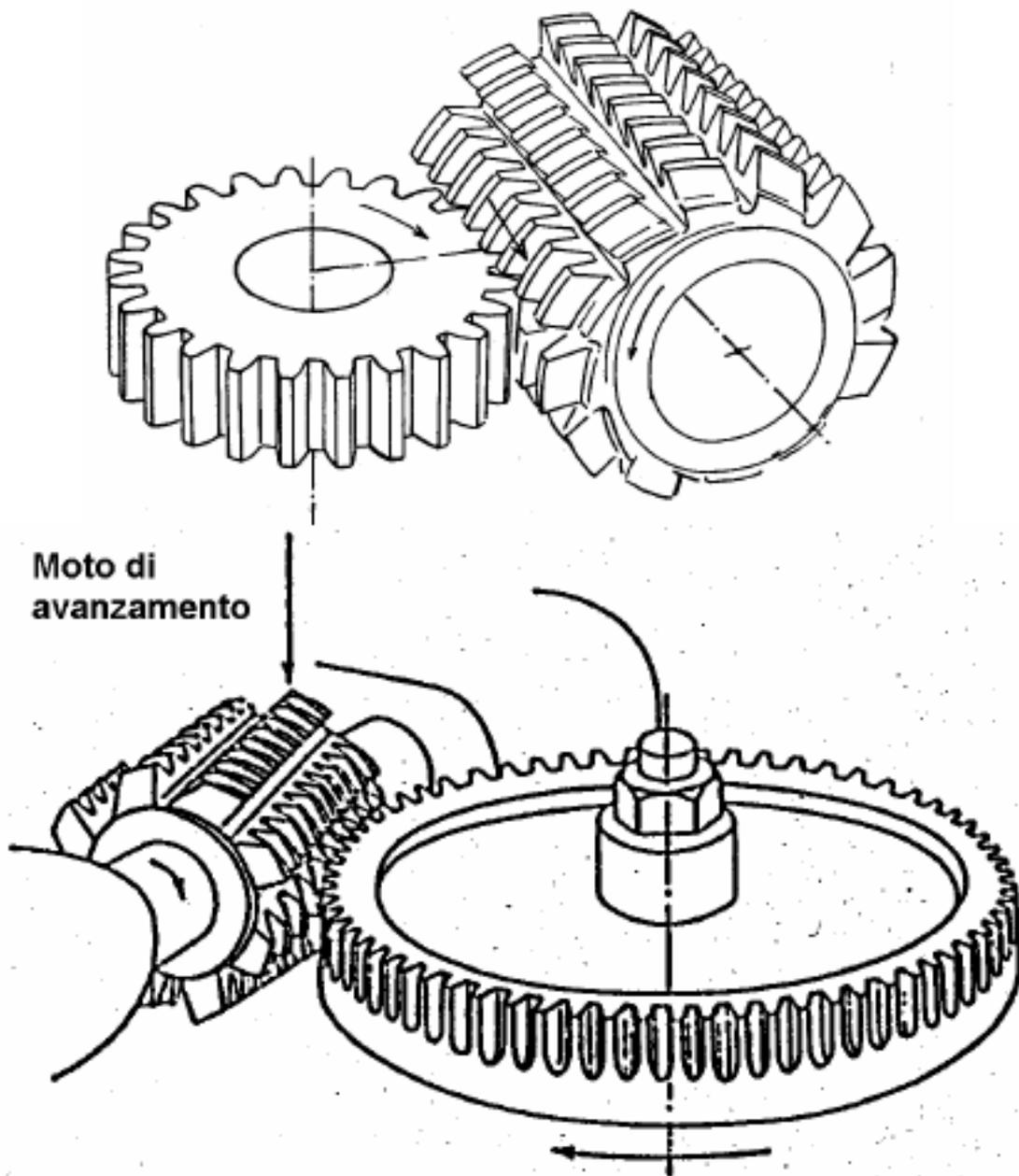
✓ Ruote dentate

➤ Forme costruttive

- Per tornitura o fucinatura

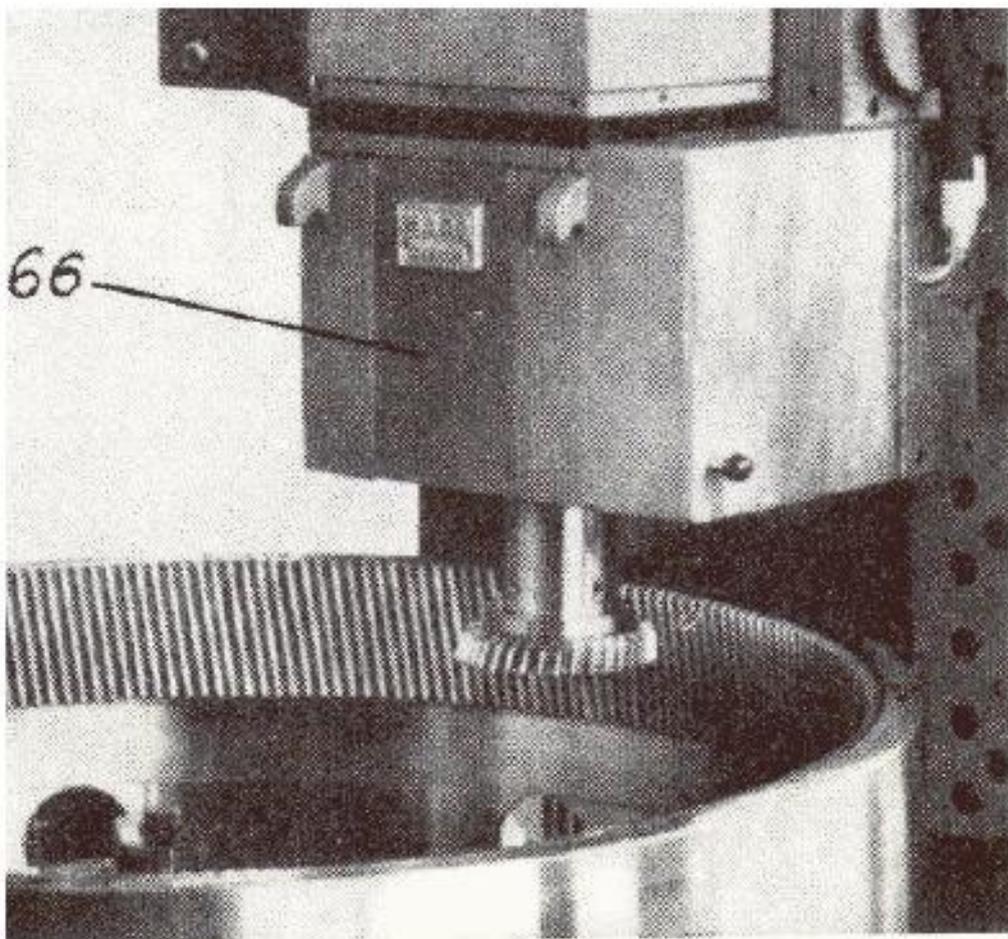
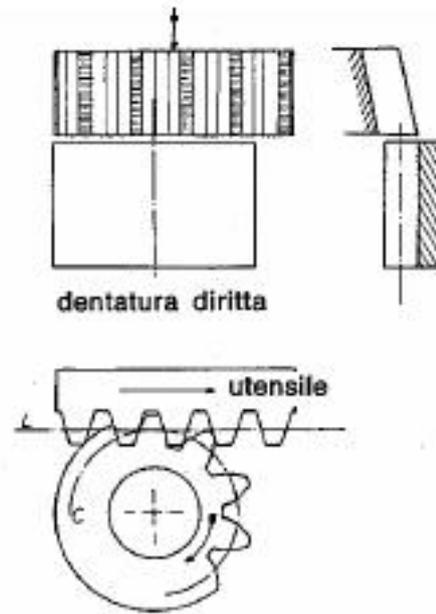
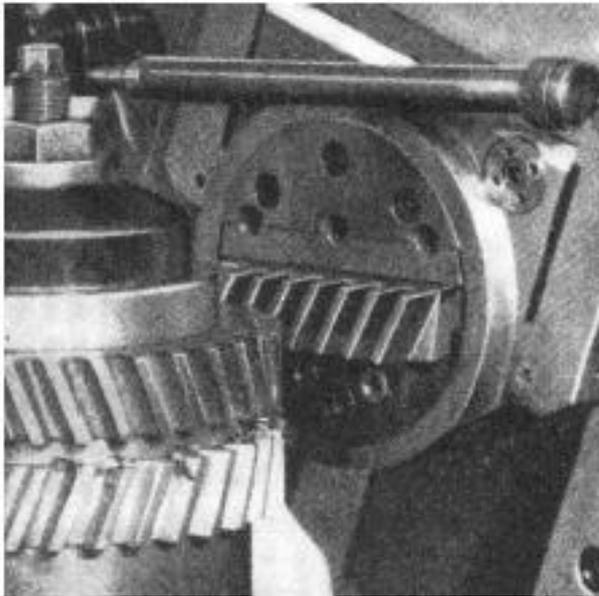


Dentatrici con moto di taglio rotatorio
(Dentatrici a creatore)

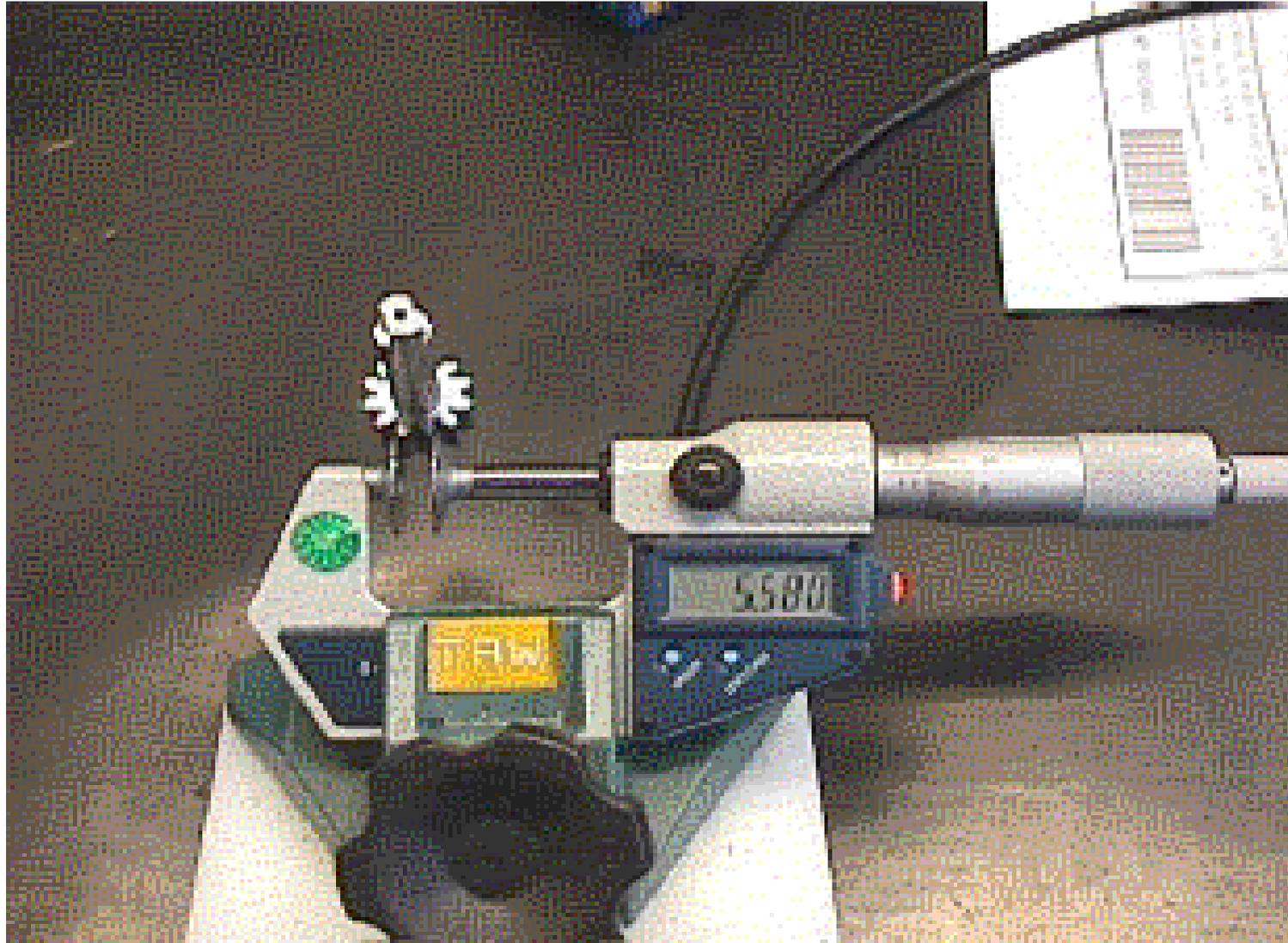


Macchine dentatrici

Dentatrici – stozzatrici (moto di taglio traslatorio alterno)



Taglio con coltello Fellows



Micrometro a piattelli

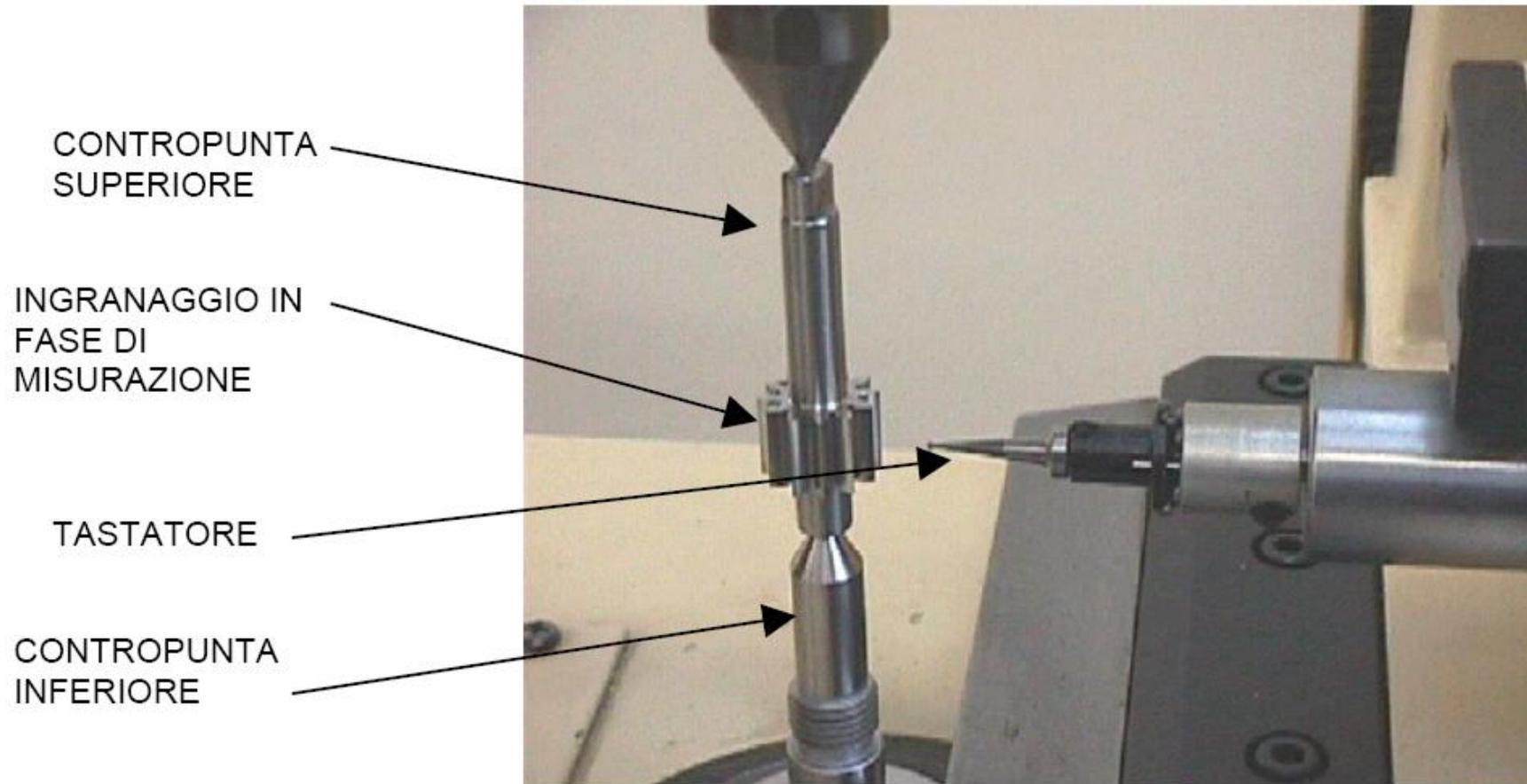


Figura a.3 – Particolare dell'evolventimetro

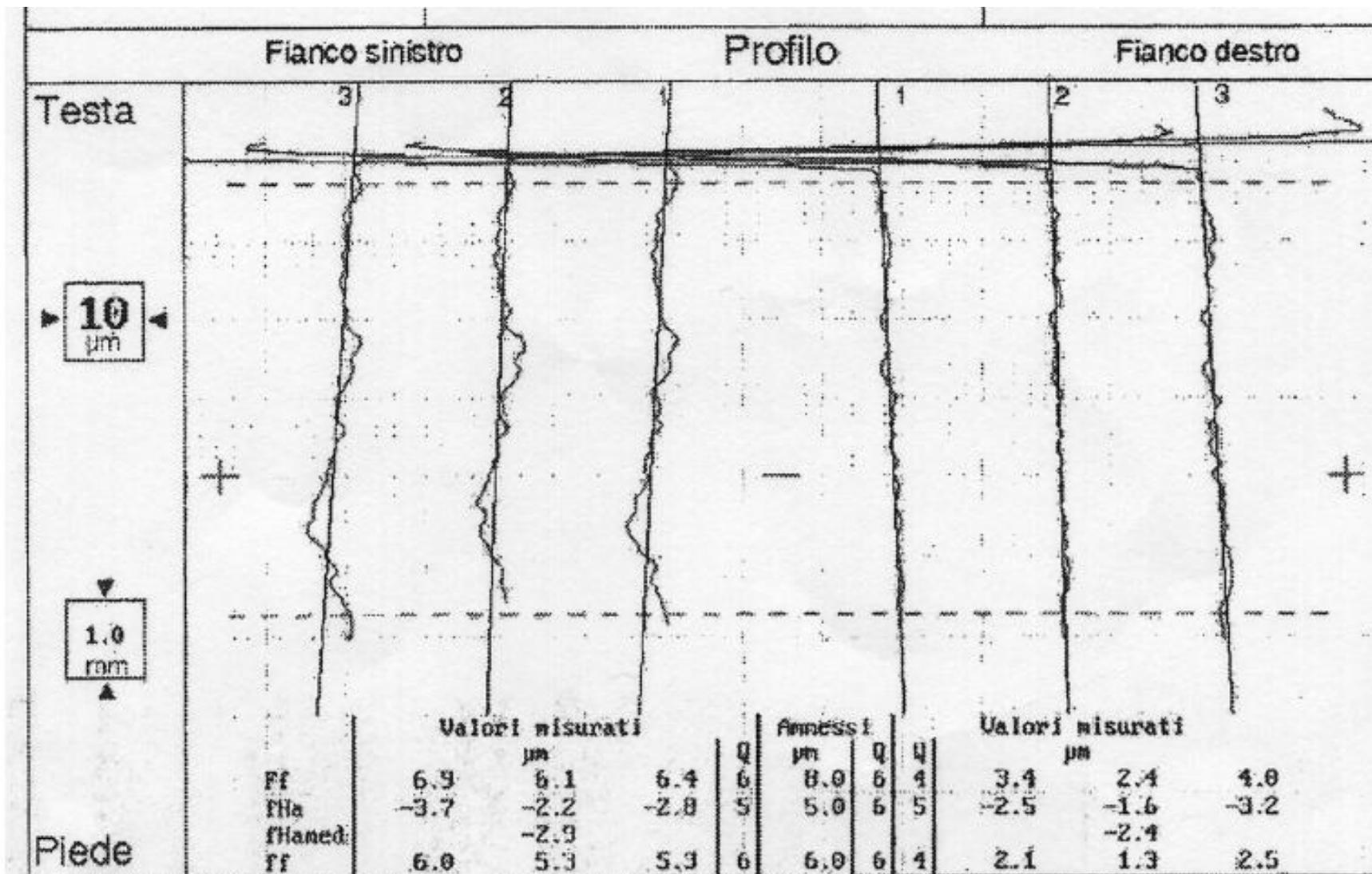


Figura a.5 Report di misura per l'evolvente

Esercizio da portare all'esame in forma scritta

CORREZIONE RUOTE DENTATE

Si consideri il riduttore a due stadi di Figura, formato da ruote dentate cilindriche a denti dritti, nel quale gli alberi di ingresso ed uscita (rispettivamente ruota 1 e ruota 4) devono essere rigorosamente coassiali.

Sono noti i moduli e il numero di denti di tutte le ruote, l'angolo di pressione di taglio ($\alpha = 20^\circ$).

L'ingranaggio del primo stadio (ruote 1 e 2) ha proporzionamento normale.

Si richiede di:

- Verificare se è necessario correggere l'ingranaggio del secondo stadio (ruote 3 e 4).
- In caso affermativo, calcolare l'angolo di pressione di lavoro e la somma dei fattori di correzione del secondo stadio.
- Nell'ipotesi di dividere tale somma in parti uguali tra le due ruote, verificare se sono rispettate le condizioni di non interferenza nel taglio.

DATI

Somma ultime 2 cifre del numero di matricola	0-4	5-9	10-14	15-18
$m_{1,2}$	2.5	3	4	5
$m_{3,4}$	3	4	5	6
z_1	50	40	30	45
z_2	160	120	135	225
z_3	59	51	38	64
z_4	118	68	95	160

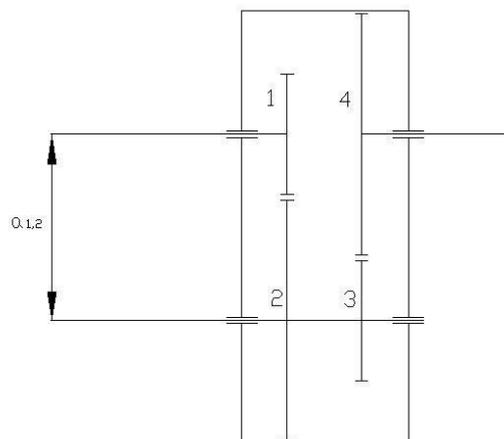


Figura: Schema di generico riduttore a due stadi.

RIGIDEZZA DI INGRANAMENTO

Il modello di rigidità variabile proposto da J. H. Kuang e da Y. T. Yang [1] rappresenta uno dei più importanti elaborati riguardanti il tema dell'eccitazione parametrica legata alla variabilità della rigidità di ingranamento. In questo modello si è sviluppata una trattazione analitica, supportata da un'analisi agli elementi finiti. In particolare è stata sviluppata un'equazione che rappresenta la rigidità di un singolo dente (pensato come una trave a mensola): in questo modo è possibile eseguire direttamente il calcolo della rigidità d'ingranamento di un generico ingranaggio a denti diritti. Questa equazione è applicabile sia a ruote corrette, che a ruote normali. Per modellare la variabilità della rigidità di ingranamento, in funzione della posizione e di altri parametri geometrici della ruota, Kuang e Yang hanno ricavato un'equazione empirica che descrive la rigidità di un singolo dente lungo l'arco d'azione. La rigidità del singolo dente K_i in corrispondenza della generica distanza radiale r_i del dente i -esimo è la seguente (espressa in [N/m/m]):

$$K_i(r_i) = 10^9 * [(A_0 + A_1 x_i) + (A_2 + A_3 x_i) \frac{r_i - R_i}{(1 + x_i)m}] \quad (1)$$

dove

$$A_0 = 3.867 + 1.612 \cdot Z_i - 0.02916 \cdot Z_i^2 + 0.0001553 \cdot Z_i^3$$

$$A_1 = 17.060 + 0.7289 \cdot Z_i - 0.01728 \cdot Z_i^2 + 0.00009993 \cdot Z_i^3$$

$$A_2 = 2.637 - 1.222 \cdot Z_i + 0.02217 \cdot Z_i^2 - 0.0001179 \cdot Z_i^3$$

$$A_3 = -6.330 - 1.033 \cdot Z_i + 0.02068 \cdot Z_i^2 - 0.0001130 \cdot Z_i^3$$

e dove:

$K_i(r_i)$ è la rigidità del dente dell' i -esima ruota quando il contatto avviene nel punto definito dal raggio r_i . La rigidità è definita come la forza che è necessario applicare per deformare di 1 m sulla retta d'azione un singolo dente di 1 m di larghezza assiale ([N/m/m]);

x_i è il coefficiente di correzione della i -esima ruota, pari al rapporto tra lo spostamento v della linea di taglio dalla linea di riferimento ed il modulo m ($x = \frac{v}{m}$);

m è il modulo della ruota [m];

Z_i è il numero di denti della ruota i -esima;

R_i è il raggio primitivo della ruota i -esima [m];

$r_i(q)$ definisce la posizione del punto di contatto al tempo t sulla linea di contatto.

I range di valori del numero di denti e del coefficiente di correzione in cui è applicabile questa equazione sono:

- $-0.6 < x_i < 0.6$;
- $12 < z_i < 100$.

Una volta definita la K_i del generico dente, è abbastanza semplice il calcolo della rigidità della singola coppia, indicata con K_s . Infatti la costante K_i rappresenta la rigidità flessionale del dente e in un modello dinamico a parametri concentrati la si può descrivere mediante una molla. In presenza di due denti che ingranano tra loro, si hanno due costanti, K_1 e K_2 , che risultano essere in serie. La rigidità della singola coppia di denti in presa è proprio la rigidità singola K_s , equivalente alle rigidità K_1 e K_2 disposte in serie.

La Figura 1 riporta uno schema in cui sono rappresentati i due denti collegati da una molla equivalente a due molle in serie di rigidità K_1 e K_2 .

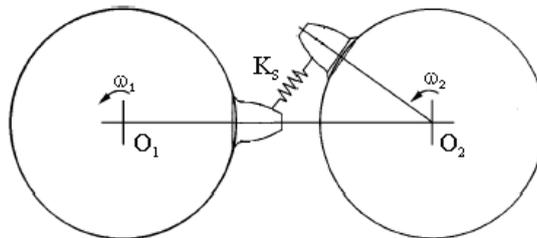


Figura 1 – Rigidità della singola coppia in presa

La relazione analitica che fornisce la rigidità equivalente è:

$$K_s = \frac{K_1(r_1)K_2(r_2)}{K_1(r_1) + K_2(r_2)} \quad (2)$$

Per descrivere le posizioni successive assunte dal dente durante l'ingranamento sono stati presi in considerazione quattro punti di contatto:

- A. punto di inizio ingranamento;
- B. punto di inizio ingranamento di una sola coppia di denti;
- C. punto di fine ingranamento di una sola coppia di denti;
- D. punto di fine ingranamento.

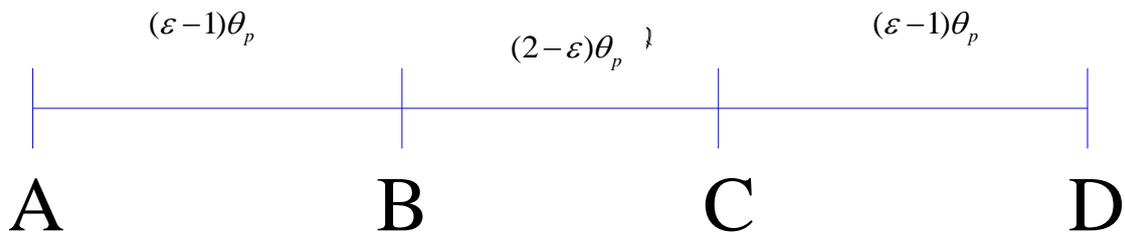


Figura 2 Arco di contatto ($\theta_p = 2\pi / z$, passo angolare)

Nell'eventualità in cui $\epsilon = 1$ (fattore di ricoprimento) si avrebbe sempre una sola coppia di denti in presa e la rigidezza di ingranamento K_m coinciderebbe con la rigidezza della singola coppia K_s , ma questo è un caso limite. Normalmente si ha ϵ compreso tra 1 e 2 e, quindi, durante l'ingranamento si passa ciclicamente da una a due coppie in presa.

Si consideri un ingranaggio generico e due coppie di denti: la coppia A composta dai denti 1 e 2 e la coppia B composta dai denti 3 e 4. I denti 1 e 3 appartengono alla ruota motrice, i denti 2 e 4 alla ruota condotta, come si può osservare in Figura 3.

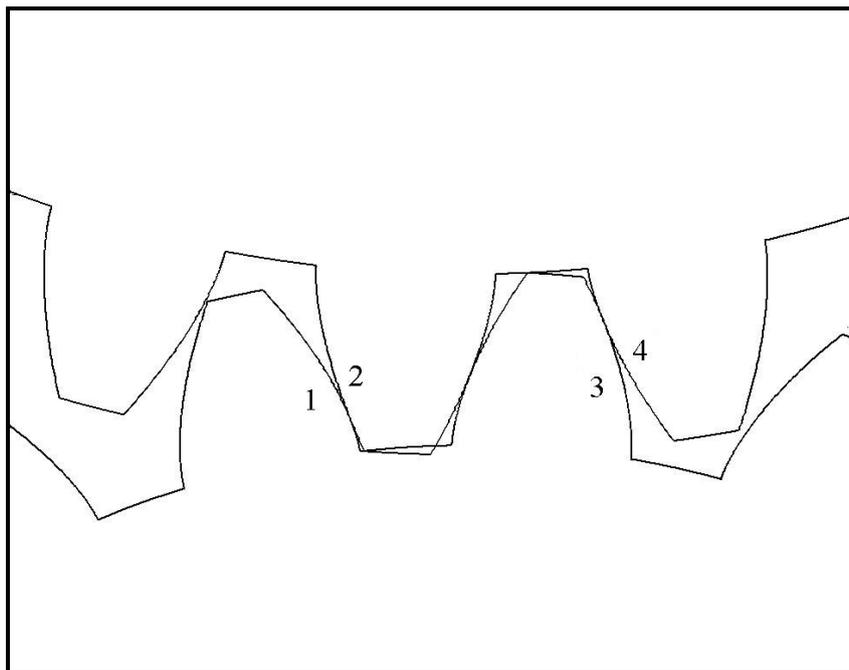


Figura 3

Nella fase iniziale, tratto compreso tra i punti A e B, si hanno due coppie in presa: il dente 1 incomincia ad impegnarsi con il corrispondente dell'altra ruota, mentre il dente 3, che lo precede traslato di un passo, percorre il tratto finale del suo ingranamento, compreso tra C e D. Quando la coppia A comincia a percorrere il tratto B-C, la coppia B si è già disimpegnata mentre la successiva coppia di denti non ha ancora incominciato ad ingranare. Nell'ultima parte la coppia A compie il tratto finale e la coppia successiva, contemporaneamente, il tratto iniziale A-B. Nella fase centrale dell'ingranamento (tratto B-C) si ha solo una coppia caricata e, quindi, la rigidezza d'ingranamento coincide con la rigidezza della coppia A, denominata K_S^A . Nei tratti iniziale e finale invece si hanno due coppie impegnate e la situazione è analoga a due molle disposte in parallelo perciò K_m in questo caso è pari alla somma delle due rigidezze delle coppie in presa, K_S^A e K_S^B .

Le espressioni delle rigidezze delle due coppie in presa sono:

$$K_S^A = \frac{K_1^A(r_1^A)K_2^A(r_2^A)}{K_1^A(r_1^A) + K_2^A(r_2^A)} \quad (3) \quad (4)$$

$$K_S^B = \frac{K_1^B(r_1^B)K_2^B(r_2^B)}{K_1^B(r_1^B) + K_2^B(r_2^B)}$$

Per quanto riguarda K_m si ha invece:

- $K_m = K_S^A$, se si ha una sola coppia in presa, cioè se si percorre il tratto B-C;
- $K_m = K_S^A + K_S^B$, se si hanno due coppie in presa, tratti A-B e C-D.

L'andamento della rigidezza subisce una forte discontinuità in corrispondenza del passaggio da due coppie ad una coppia di denti in presa e questo rappresenta un elemento importante nell'analisi del comportamento vibratorio degli ingranaggi.

Implementazione della Rigidezza di Kuang-Yang in Matlab

Il metodo di Kuang Yang può essere così implementato:

Per ottenere la distanza radiale r_1 ed r_2 si usano le formule 10-11 che definiscono la posizione del punto di -contatto lungo la retta d'azione in funzione della rotazione della ruota ϑ

Sia T il periodo di ingranamento (5) e $R_{1,\text{inf}}$ la distanza radiale (6) dal punto di inizio contatto A

Figura 2

$$T = \frac{60}{nZ} \quad (5)$$

$$R_{1,\text{inf}} = \sqrt{\left(a \cdot \sin \alpha - \sqrt{R_{t2}^2 - R_{b2}^2}\right)^2 + R_{b1}^2} \quad (6)$$

Dove $a, \alpha, R_{ti}, R_{bi}$ sono l'interasse, l'angolo di pressione, il raggio di testa e il raggio base della ruota i-esima.

Sia \mathcal{G} l'angolo che definisce l'avanzamento dell'ingranamento dal punto A (inizio ingranamento) al punto D (fine del segmento di contatto).

$$\overline{NM} = \overline{NA} + \overline{AM} \quad (7)$$

Il segmento \overline{NA} può essere calcolato usando il teorema di Pitagora riferito al triangolo ANO_1 :

$$\overline{NA} = \sqrt{R_{1,\text{inf}}^2 - R_{b1}^2} \quad (8)$$

mentre dalle proprietà dell'evolvente si ottiene \overline{AM}

$$\overline{AM} = R_{b1} \mathcal{G} \quad (9)$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo NMO_1 si ottiene che:

$$r_1 = \sqrt{R_{b1}^2 + \overline{NM}} = \sqrt{R_{b1}^2 + \left[\sqrt{R_{1,\text{inf}}^2 - R_{b1}^2} + R_{b1} \mathcal{G}\right]^2} \quad (10)$$

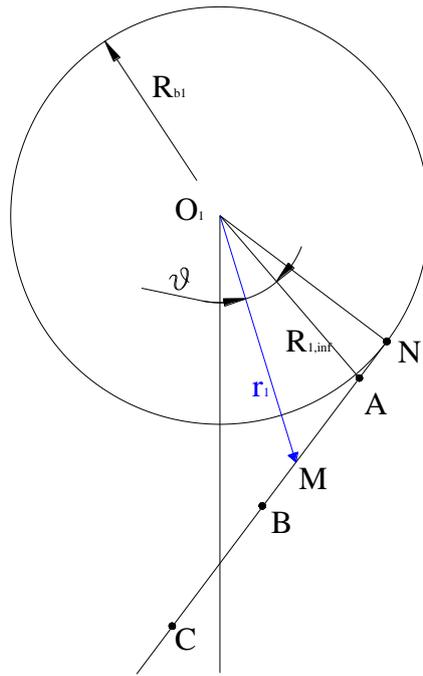


Figura 10

Il raggio che identifica la posizione del punto di contatto relativamente alla ruota 2 è calcolato dalla formula.

$$r_2 = \sqrt{R_{b2}^2 + \left[a_l \cdot \sin \alpha_l - \sqrt{r_1^2 - R_{b1}^2} \right]^2} \quad (11)$$

La (11) è ottenuta con un procedimento analogo alla (10).

Per il tratto AB con 2 coppie di denti in presa si ricavano con la (1) le rigidezze dei singoli denti chiamate K_{AB1} e K_{AB2} , rispettivamente per la ruota 1 e 2, utilizzando all'interno della (1) il raggio $r_{1,AB}$ e $r_{2,AB}$.

Questi due raggi sono definiti dalla 10 e 11 in cui l'angolo ϑ della 10 è l'angolo che spazza il segmento di contatto dal punto A al punto B (ϑ_{AB}).

Analogamente si ricavano le rigidezze del singolo dente per i tratti BC e CD.

Una volta ottenute le rigidezze dei singoli denti si ottengono per i tratti in cui ci sono 2 coppie in presa (tratto AB e CD) le rigidezze delle due coppie, chiamate coppia A (quella in contatto lungo il segmento AB) e coppia B (in contatto lungo il segmento CD). Queste 2 rigidezze sono calcolate con la (3-4) considerando cioè ogni coppia in contatto (formata da 2 denti) equivalenti a 2 molle in serie di rigidezza pari alla rigidezza del singolo dente.

Una volta ottenute le rigidezze delle 2 coppie A e B contemporaneamente in presa (K_S^A, K_S^B), la rigidezza totale (K_m) delle due coppie si ottiene considerando le due coppie di denti equivalenti ad un sistema di molle in parallelo e considerando lo spessore b della ruota:

$$K_m = b[m] \cdot (K_S^A + K_S^B) \quad \left[\frac{N}{m} \right] \quad (12)$$

Per quanto riguarda la rigidezza della singola coppia in presa nel tratto BC questa viene calcolata usando la (2) e tenendo in considerazione lo spessore del dente:

$$K_m = b \cdot \frac{K_{BC1} \cdot K_{BC2}}{K_{BC1} + K_{BC2}} \quad \left[\frac{N}{m} \right] \quad (13)$$

Riferimenti

[1] J.H. Kuang, Y.T. Yang, *An estimate of mesh stiffness and load sharing ration of a spur gear pair*, International Power Transmission and Gearing Conference, Vol 1, DE-vol 43-1, ASME, 1992.

Esercizio da portare all'esame in forma scritta

Rigidezza di ingranamento

Si calcoli il valore della rigidezza di ingranamento per la seguente coppia di ruote:

```
=====
%=====
% Struttura dei dati.
ruota_1.z      = 40;           % Numero denti.
ruota_1.m      = 2.5*10^-3;    % Modulo in [m].
ruota_1.alfa   = pi/9;        % Angolo di pressione [rad].
ruota_1.X      = 0;           % Coefficiente di correzione.
ruota_1.ep     = 1.2;         %fattore di ricoprimento
ruota_1.b      = 9*10^-3;     %larghezza di fascia [m]
ruota_2.z      = 22;         % Numero denti.
ruota_2.m      = ruota_1.m;    % Modulo in [m].
ruota_2.alfa   = ruota_1.alfa; % Angolo di pressione [rad].
ruota_2.X      = 0;           % Coefficiente di correzione.
ruota_2.b=ruota_1.b;
```

Confrontare la rigidezza di ingranamento ottenuta con i dati forniti con quella ricavata variando il numero di denti ($ruota_1.z=100$, $ruota_2.z=15$) e lo spessore di fascia (20mm per la ruota 1 e 15mm per la ruota 2).

Graficare la rigidezza di ingranamento in N/m e mostrarla in funzione della rotazione angolare espressa in gradi.

TRACCIA DI SOLUZIONE

1. calcolare raggio primitivo, raggio base, raggio di testa, passo angolare ($ruota_1.R0 = ruota_1.m * ruota_1.z / 2$; % Raggio primitivo) e il raggio di primo contatto ($ruota_1.Rinf$).

2. definire i punti A, B, C, D

```
A=0;
B=(ruota_1.ep-1)*2*pi/ruota_1.z;
C=2*pi/ruota_1.z;
D=ruota_1.ep*2*pi/ruota_1.z;
```

3. definire i coefficienti A_0 , A_1 , A_2 , A_3 ,

4. Per il tratto AB, definire

$tetaAB = linspace(A, B)$; crea un vettore di numero (angoli) da A a B

e poi definire $r1_{AB}$, $r2_{AB}$ usando le formule (10-11). Poi definire la rigidezza del singolo dente $KAB1$ e $KAB2$ usando la formula (1)

5. Analogamente per il tratto CD

6. Analogamente per il tratto BC

7. definire le Rigidezze relative alle coppie di denti A e B, cioè relative ai tratti AB e CD, usando le formule 3-4 (la coppia A è in contatto nel tratto AB e la coppia B nel tratto CD. La coppia A è quella che inizia l'ingranamento, la B è quella già in presa che precede la A.

```
KS_A = (KAB1.*KAB2)./(KAB1+KAB2); %rigidezza della coppia A
```

```
KS_B = (KCD1.*KCD2)./(KCD1+KCD2); %rigidezza della coppia B
```

```
Km_2coppie=ruota_1.b*(KS_A+KS_B); %rigidezza con 2 coppie [N/m] (tratto AB e CD)
```

8. Definire la Rigidezza relativa alla sola coppia in presa nel tratto BC, usando la formula 2

```
Km_1coppia = ruota_1.b*((KBC1.*KBC2)./(KBC1+KBC2)); %rigidezza della singola coppia A [N/m] (tratto BC)
```

9. creare un vettore con il segmento d'azione completo (AD) e con la rigidità di ingranamento completa

```
tetaAD=[tetaAB,tetaBC,tetaCD]*180/pi;  
rig_ingran=[ Km_2coppie Km_1coppia Km_2coppie];
```

Esempio di soluzione

