Fondamenti di Automatica

Risposte canoniche e sistemi elementari

Dott. Ing. Marcello Bonfè
Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara
Tel. +39 0532 974839
E-mail: marcello.bonfe@unife.it

Risposte canoniche e sistemi elementari ANTITRASFORMAZIONE di FUNZIONI RAZIONALI

Antitrasformazione di funzioni di trasferimento

- Data la funzione razionale ($n \geq m$):

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- Le radici di D(s) sono i **poli della funzione F(s)**
- Le radici di N(s) sono gli **zeri della funzione F(s)**
- La differenza $r = n - m$ è il **grado relativo di F(s)**
- La fisica realizzabilità corrisponde a $r \geq 0$
- Se la funzione di trasferimento di un sistema ha grado relativo r, l'uscita è influenzata dall'ingresso solo a partire dalla sua derivata di ordine r

Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 1

- Se la F(s) ha grado relativo $r = 0$, si può facilmente scomporre un termine costante (la cui antitrasformata è la stessa costante per un impulso di Dirac). Es.:

$$F(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 5} = 3 - \frac{4s + 14}{s^2 + 2s + 5}$$

- Se $r > 0$ (o si è già scomposto il termine costante) e i poli di F(s) sono tutti distinti, **allora** la funzione si può **scomporre in fratti semplici**:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s - p_i}$$

Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 2

- Nella scomposizione in fratti semplici di F(s) ogni termini k_i si chiama **residuo di F(s) nel polo p_i**, e risulta:

$$k_i = \left[(s-p_i)\frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s \to p_i}$$

- Da tale scomposizione, **l'antitrasformata di F(s)**:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t}$$

- **NOTA:** Se F(s) è la funzione di trasferimento di un sistema, l'antitrasformata corrisponde alla **risposta impulsiva** W(t).

Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 3

- Se i poli <u>non sono tutti distinti</u> (con $\sum_{i=1}^{h} n_i = n$), la **scomposizione in fratti semplici** diventa:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_1}\dots(s-p_h)^{n_h}} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{ij}}{(s-p_i)^{n_i-j+1}}$$

- I **residui di F(s)** risultano in tal caso:

$$k_{ij} = \frac{1}{(j-1)!}\left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s-p_i)^{n_i}\frac{N(s)}{D(s)} \right] \right\}_{s \to p_i}$$

- **L'antitrasformata di F(s)** risulta:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{ij}t^{n_i-j}e^{p_i t}}{(n_i-j)!}$$

Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 4

- Generalizzando i risultati precedenti, si può osservare che, indipendentemente dai relativi coefficienti costanti, l'antitrasformata di una F(s) razionale è composta da termini, detti **modi di F(s)**, del tipo:

$$e^{p_1 t}, te^{p_1 t}, \ldots, t^{n_1 - 1} e^{p_1 t}, \ldots, e^{p_h t}, \ldots, t^{n_h - 1} e^{p_h t}$$

NOTARE l'analogia con i modi degli autovalori di un modello ingresso-stato-uscita..

Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 5

- Si noti che per ogni **polo complesso** di F(s), sarà sempre presente anche il relativo coniugato
- Anche i residui per tali poli sono complessi:

$$\frac{k_1}{s - p_1} + \frac{\bar{k}_1}{s - \bar{p}_1} = \frac{u_1 + jv_1}{s - (\sigma_1 + j\omega_1)} + \frac{u_1 - jv_1}{s - (\sigma_1 - j\omega_1)}$$

- Ponendo: $\frac{M_1}{2} = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad \varphi_1 = \arg(u_1 + jv_1)$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{\bar{k}_1}{s - \bar{p}_1} = \frac{M_1}{2} \left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - (\sigma_1 + j\omega_1)} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - (\sigma_1 - j\omega_1)} \right)$$

Antitrasformazione di funzioni di trasferimento - 6

- Pertanto l'antitrasformata dei fratti corrispondenti a poli complessi:

$$f_1(t) = \frac{M_1}{2}\left(e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}\right)$$

- Applicando la formula di Eulero:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= M_1 e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ &= M_1 e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Antitrasformazione: primo esempio

- Poli semplici reali: $F(s) = \dfrac{s-6}{s^3+5s^2+6s}$

  (p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -3)

$$F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

$$k_1 = [sF(s)]_{s\to 0} = -1$$

$$k_2 = [(s+2)F(s)]_{s\to -2} = 4$$

$$k_3 = [(s+3)F(s)]_{s\to -3} = -3$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}[F(s)] = -1 + 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

Antitrasformazione: secondo esempio

- Poli multipli reali: $$F(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^3}$$

  (p_1 = 0, p_2 = -2)

$$F(s) = \frac{k_{11}}{s} + \frac{k_{23}}{s+2} + \frac{k_{22}}{(s+2)^2} + \frac{k_{21}}{(s+2)^3}$$

$$k_{11} = [sF(s)]_{s \to 0} = \frac{3}{8}$$

$$k_{23} = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left((s+2)^3 F(s)\right)\right]_{s \to -2} = -\frac{3}{8}$$

$$k_{22} = \left[\frac{d}{ds}\left((s+2)^3 F(s)\right)\right]_{s \to -2} = -\frac{3}{4}$$

$$k_{21} = \left[(s+2)^3 F(s)\right]_{s \to -2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}[F(s)] = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}e^{-2t} - \frac{3}{4}te^{-2t} - \frac{1}{4}t^2 e^{-2t}$$

Antitrasformazione: terzo esempio

- Poli semplici complessi: $$F(s) = \frac{s}{s^2+4s+13}$$

  (p_1 = -2 ± j 3)

$$F(s) = \frac{k_1}{s+2-j3} + \frac{\bar{k}_1}{s+2+j3}$$

$$k_1 = [(s+2-j3)F(s)]_{s \to -2+j3} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{3}$$

$$\frac{M_1}{2} = \frac{\sqrt{13}}{6}, \quad \varphi_1 = \arctan\frac{2}{3}$$

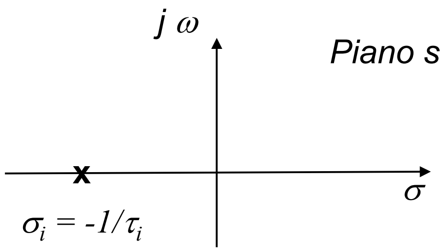
$$\Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}[F(s)] = \frac{\sqrt{13}}{3}e^{-2t}\cos(3t + \arctan\frac{2}{3})$$

Analisi modale di funzioni di trasferimento

- I poli della funzione di trasferimento di un sistema, espressa con F(s) razionale, hanno ruolo analogo a quello degli autovalori di A in un modello ingresso-stato-uscita (stabilità del sistema)
- Infatti l'antitrasformata di F(s) (con grado relativo $r > 0$):
  - tende a 0 per t→∞ se tutti i suoi poli hanno **parte reale negativa**
  - è limitata se non ha poli a parte reale negativa e quelli a parte reale nulla sono semplici
  - tende a ∞ per t→∞ se ha poli a **parte reale positiva** (o a parte reale nulla ma non semplici)

Funzioni di trasferimento: termini elementari

- Per semplificare l'antitrasformazione si usa definire tabelle di termini elementari, espressi inoltre in modo da evidenziare opportuni parametri caratteristici
- Es.: polo reale $p_i = \sigma_i, \quad (\sigma_i \neq 0)$



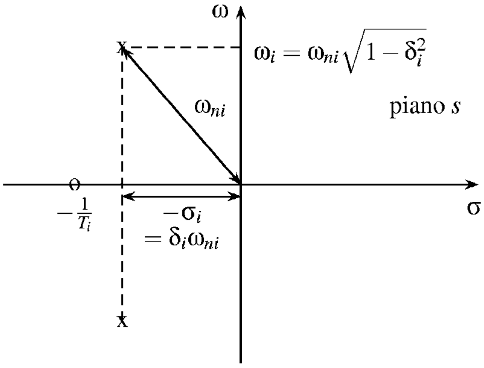
$$\frac{k_i}{s-\sigma_i} = \frac{k_i'}{1+\tau_i s}, \quad \text{con } \tau_i = -1/\sigma_i$$

$$k_i' = -\frac{k_i}{\sigma_i}$$

τ_i è detta **costante di tempo**

Funzioni di trasferimento: termini elementari - 1

- Es.: coppia di poli complessi



$$\frac{u_i + j\,v_i}{s-\sigma_i - j\,\omega_i} + \frac{u_i - j\,v_i}{s-\sigma_i + j\,\omega_i} = 2\,\frac{u_i\,(s-\sigma_i) - v_i\,\omega_i}{s^2 - 2\,\sigma_i\,s + \sigma_i^2 + \omega_i^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{k_i'\,(\sigma_i^2+\omega_i^2)\,(1+T_i\,s)}{(s-\sigma_i)^2+\omega_i^2} = \frac{k_i'\,\omega_{ni}^2\,(1+T_i\,s)}{s^2+2\,\delta_i\,\omega_{ni}\,s+\omega_{ni}^2}$$

$$\omega_{ni} = \sqrt{\sigma_i^2+\omega_i^2} \qquad \delta_i = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2+\omega_i^2}}$$

$$k_i' = -2\,\frac{u_i\,\sigma_i + v_i\,\omega_i}{\sigma_i^2+\omega_i^2} \qquad T_i = -\frac{u_i}{u_i\,\sigma_i + v_i\,\omega_i}$$

Funzioni di trasferimento: termini elementari - 2

- Trascurando lo zero del denominatore (T_i=0) si usa considerare tale termine elementare:

$$\frac{\omega_{ni}^2}{s^2+2\,\delta_i\,\omega_{ni}\,s+\omega_{ni}^2}$$

per il quale si definisce:

- δ_i **coefficiente di smorzamento**
- ω_{ni} **pulsazione naturale**

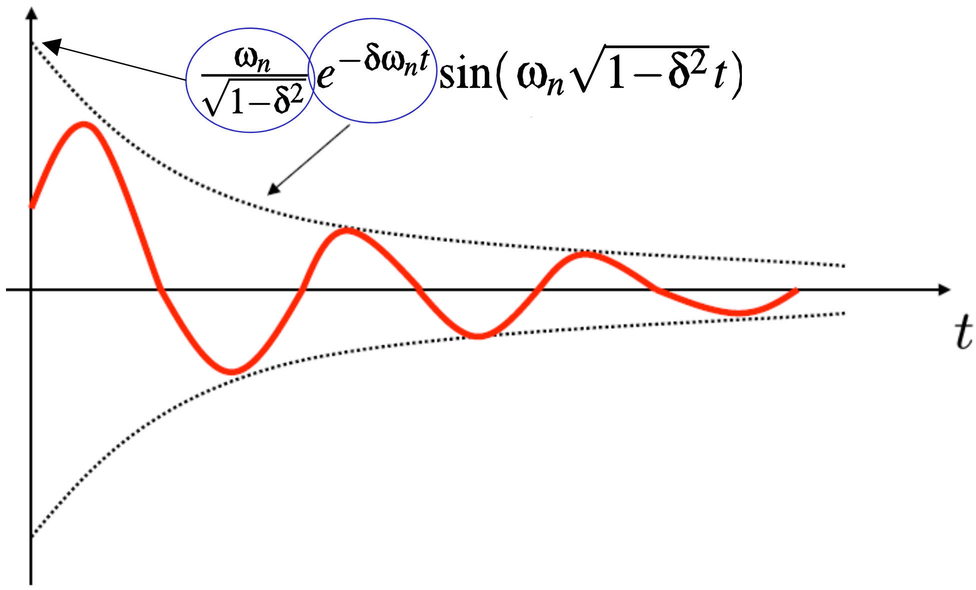
Funzioni di trasferimento: termini elementari - 3

- Per i termini elementari visti, più il termine 1/s (la cui antitrasformata è il gradino unitario):

Trasformata di Laplace	Funzione del tempo
$\dfrac{1}{s}$	$1 \quad (u(t)$ gradino unitario in $t=0)$
$\dfrac{1}{1+\tau s}$	$\dfrac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t)$
$\dfrac{\omega_n^2(1+Ts)}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n\sqrt{\dfrac{1-2\delta\omega_n T+\omega_n^2T^2}{1-\delta^2}}\, e^{-\delta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t+\varphi\right)$ $\varphi := \arg\left(1-\delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1-\delta^2}\right)$

Funzioni di trasferimento: termini elementari - 4

- Il termine associato a un polo reale ha un andamento ben noto, mentre quello associato a poli complessi è del tipo:

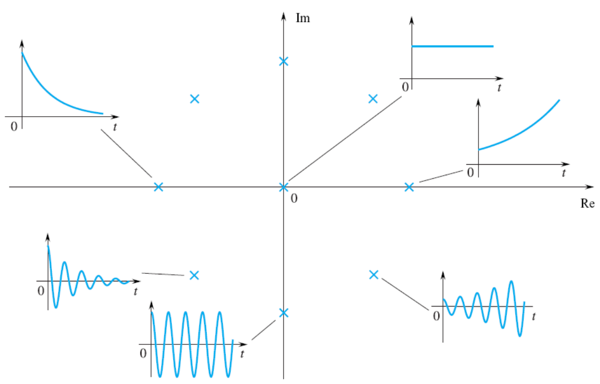


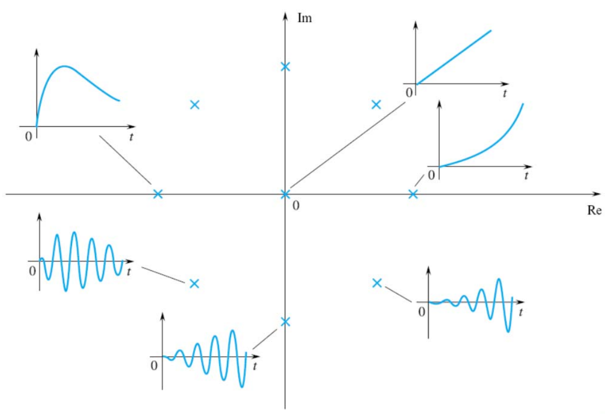
Funzioni di trasferimento: termini elementari - 5

N.B.: l'analisi modale di una funzione di trasferimento è assolutamente analoga a quella della matrice di transizione (autovalori della matrice A nel modello ingresso-stato-uscita).

La FdT rappresenta però **SOLO** la parte raggiungibile-controllabile e osservabile-ricostruibile del sistema!

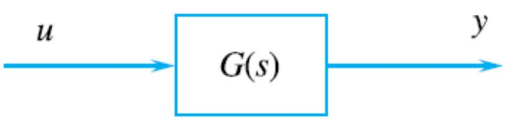
POLI SEMPLICI: **POLI DOPPI:**





Risposte canoniche di un sistema

- Dato un sistema:



con (n > m): $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- Si usa analizzare la riposta di tale sistema quando all'ingresso sono applicati segnali tipici:
  - impulso di Dirac ➔ U(s) = 1
  - gradino unitario ➔ U(s) = 1/s
  - rampa unitaria ➔ U(s) = $1/s^2$

Risposte canoniche di un sistema - 1

- Infatti, le risposte a tali stimoli, dette **risposte canoniche**, caratterizzano completamente il comportamento dinamico del sistema:

  ➔ $Y(s) = G(s)U(s)$

  antitrasformando diventa:

$$y(t) = \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

con $W(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$

corrispondente alla **risposta impulsiva** del sistema (se questo è puramente dinamico)

Risposte canoniche di un sistema - 2

- Si noti che la risposta all'impulso di Dirac è anche la derivata della risposta al gradino unitario:

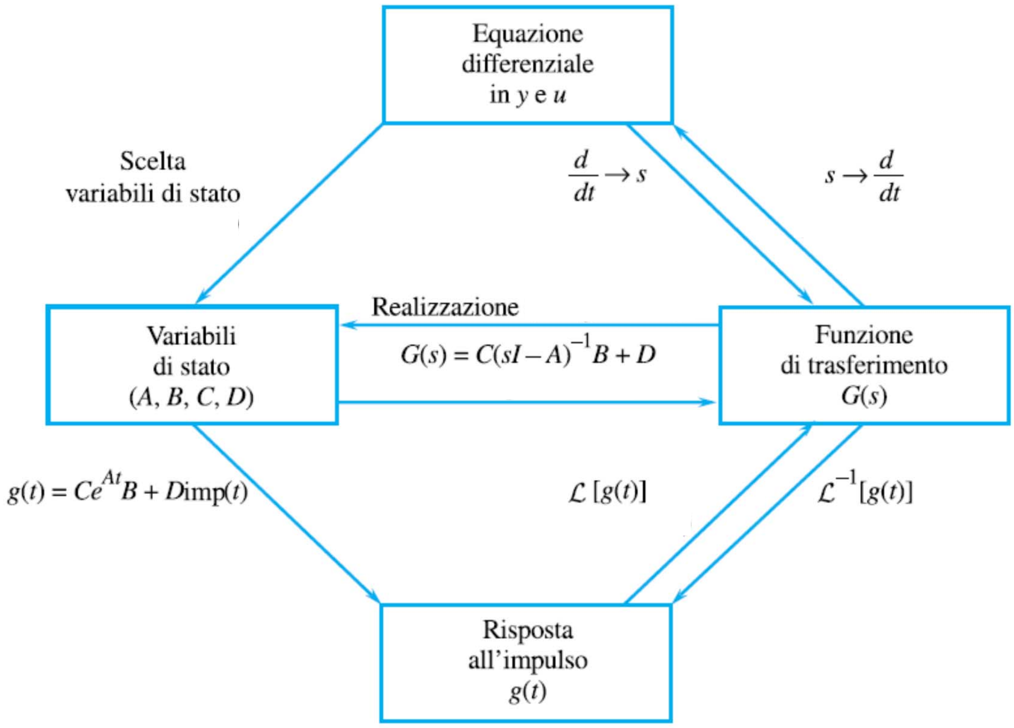
$$G(s) = s\frac{G(s)}{s}$$

  e che ovviamente la risposta al gradino unitario è la derivata della risposta alla rampa unitaria:

$$\frac{G(s)}{s} = s\frac{G(s)}{s^2}$$

- La risposta al gradino unitario è anche detta **risposta indiciale del sistema**

Riepilogo delle relazioni tra modelli I-U e I-S-U



Risposte canoniche e sistemi elementari
SISTEMI di PRIMO e SECONDO ORDINE

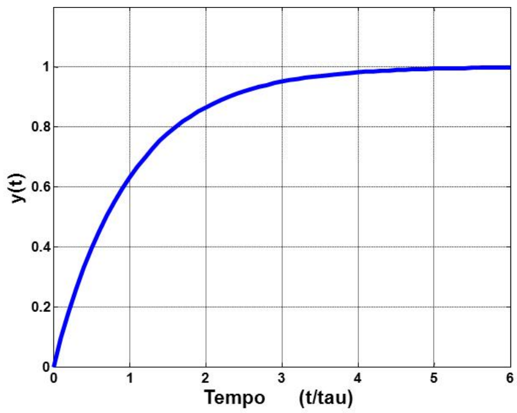
Risposta al gradino di sistemi del primo ordine

- Si consideri il sistema con f. di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$$

- Il suo comportamento è unicamente determinato dalla costante di tempo τ e la risposta è:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+\tau s)\,s}\right] \\ &= 1-e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

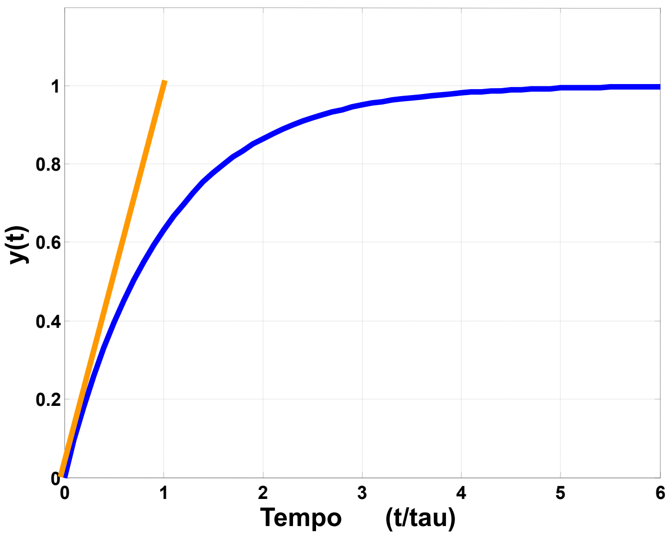


Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 1

- Si noti che per la risposta di tale sistema:

$$y(0) = 0$$

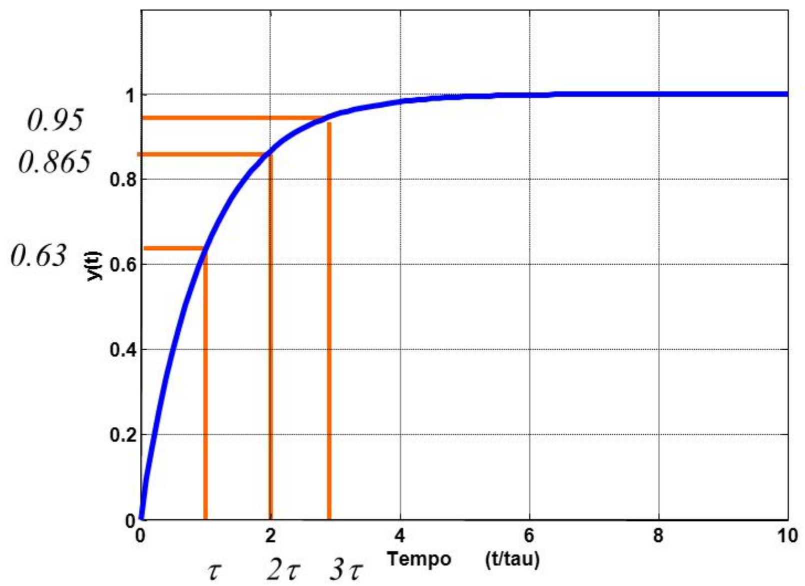
$$\left.\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right|_{t\to 0^+} = \frac{1}{\tau}$$



- Cioè il **valore iniziale** è nullo e la **pendenza iniziale** è $1/\tau$

Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 2

- Per t = τ la risposta assume un valore pari al 63.2 % del valore finale
- Per t = 2 τ il valore è pari all'86.5% del valore di regime,
- Per t = 3 τ si raggiunge il 95.0% del valore di regime.



Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 3

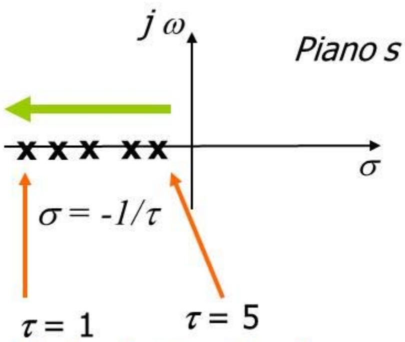
- **Tempo di assestamento (T_a):** si definisce come il tempo che occorre perché l'uscita rimanga entro un margine di errore del 5% rispetto al valore finale

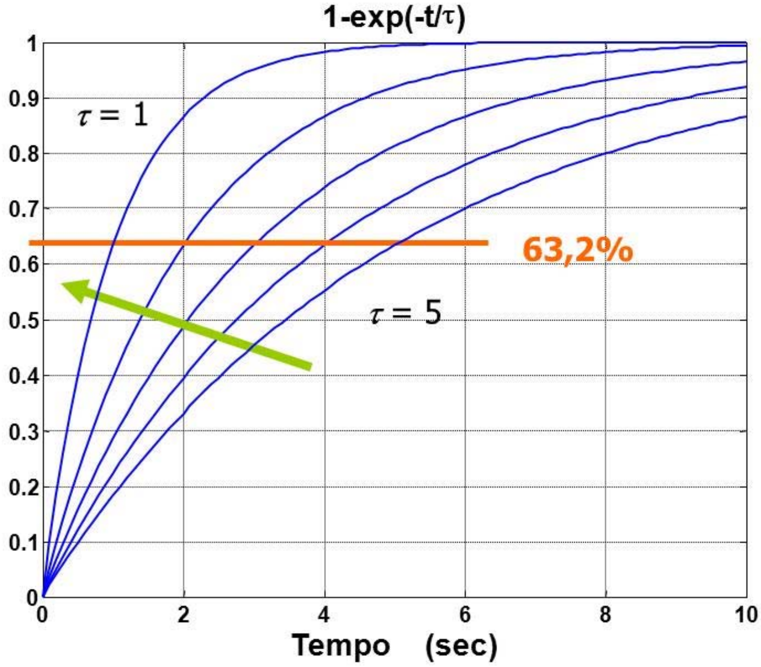
- In base ai valori visti nella slide precedente, si può affermare che per il sistema del primo ordine:

$$\boxed{T_a = 3\tau}$$

Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 4

- Risposta del sistema per $\tau = (5,4,3,2,1)$:





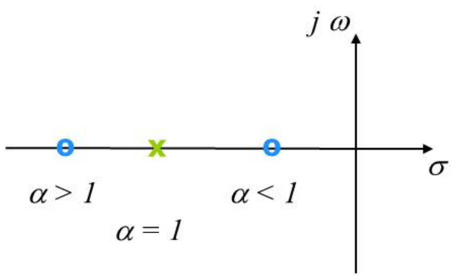
Al diminuire di τ, la "velocità" dell'uscita aumenta

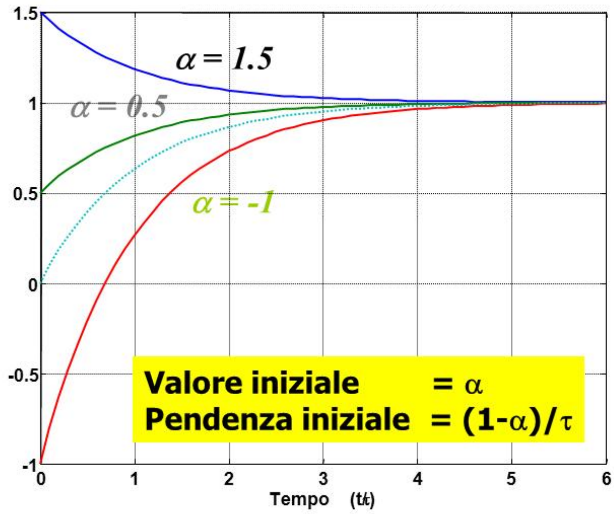
Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 5

- Si consideri il sistema con un polo e uno zero:

$$G(s) = \frac{1+Ts}{1+\tau s} = \frac{T}{\tau} + \frac{1-T/\tau}{1+\tau s} = \alpha + \frac{1-\alpha}{1+\tau s}$$

- La risposta al gradino è: $y(t) = 1 + (\alpha - 1)e^{-t/\tau}$





Risposta al gradino di sistemi del primo ordine - 6

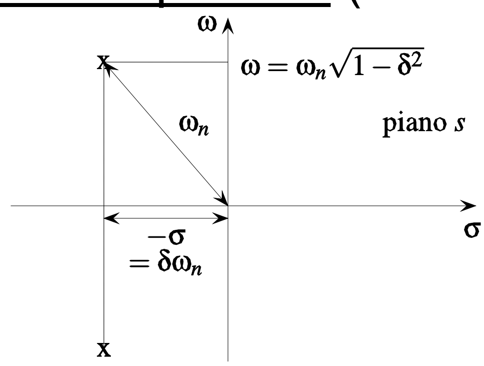
- **N.B.:** nel sistema con un polo e uno zero l'uscita assume all'istante t=0 un valore $\neq$0, nonostante le condizioni iniziali siano sempre ipotizzate nulle
- L'uscita del sistema è pertanto discontinua nella risposta al gradino (per sua natura discontinuo)
- Ciò è tipico dei sistemi con grado relativo *r* = 0, per i quali l'ingresso influenza direttamente l'uscita
- Nei sistemi con grado relativo *r* > 0 ciò non avviene, perché l'uscita *y(t)* è l'integrazione *r*-esima della variabile influenzata dall'ingresso (cioè $d^r y(t)/dt^r$), il che ne *filtra* le discontinuità

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine

- Si consideri:

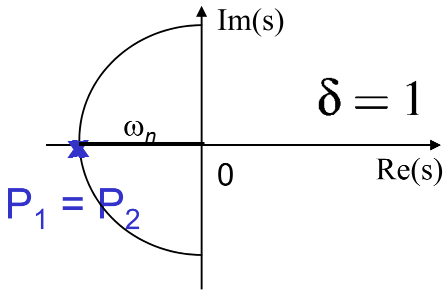
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\, s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\delta\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

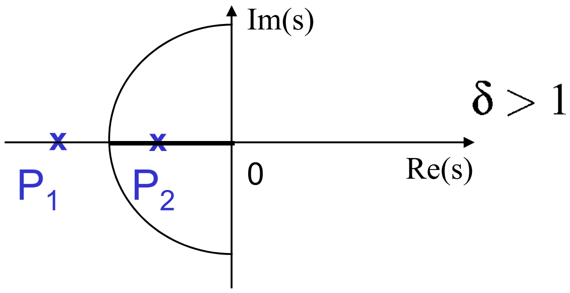
- Si usa considerare il coefficiente di smorzamento $0 \leq \delta < 1$, perché se fosse $\delta < 0$ si avrebbero poli a parte reale positiva (sistema instabile)



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 1

- Inoltre, se fosse $\delta = 1$ i poli sarebbero reali e coincidenti, mentre se fosse $\delta > 1$ i poli sarebbero reali e distinti, condizioni analizzabili con i criteri già visti per sistemi del primo ordine





Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 2

- In base al valore del coefficiente di smorzamento e, quindi, del piazzamento dei poli, si definisce:
  - se $\delta = 1$: sistema con **smorzamento critico**
  - se $\delta > 1$: sistema **sovra-smorzato**
  - se $0 \leq \delta < 1$: sistema **sotto-smorzato**

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 3

- La risposta al gradino unitario è:

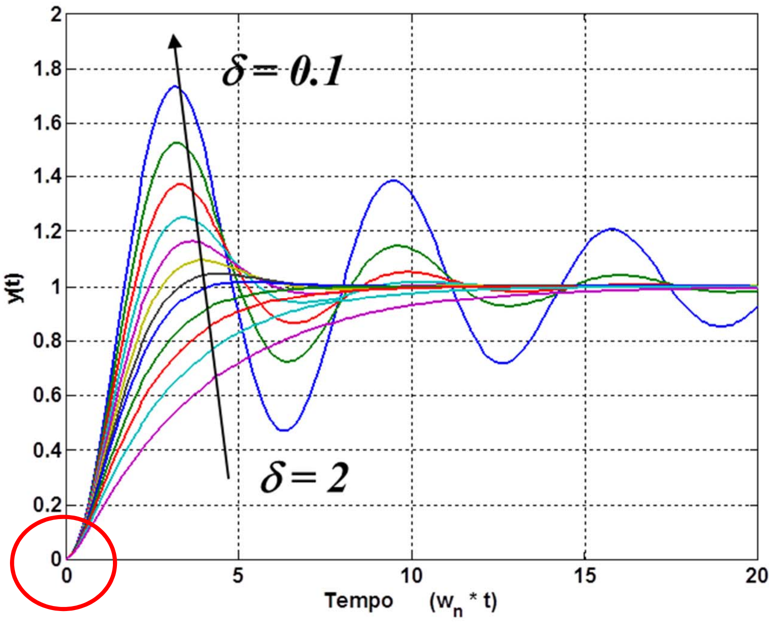
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\,(s^2+2\,\delta\,\omega_n\,s+\omega_n^2)}\right] = 1 - A\,e^{-\delta\omega_n t}\,\sin(\omega t+\varphi)$$

- Con:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \\ \omega &= \omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} = \\ &= \arcsin\sqrt{1-\delta^2} = \arccos\delta \end{aligned}$$

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 4

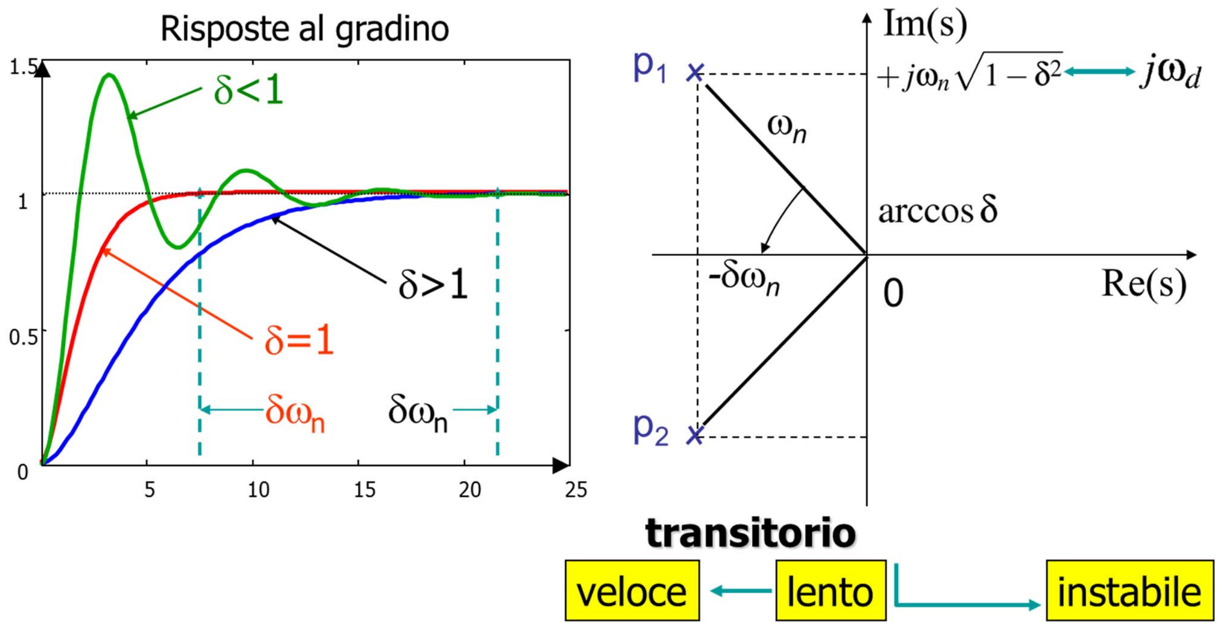
- Risposta al gradino unitario per diversi valori di δ



N.B.: pendenza iniziale = 0

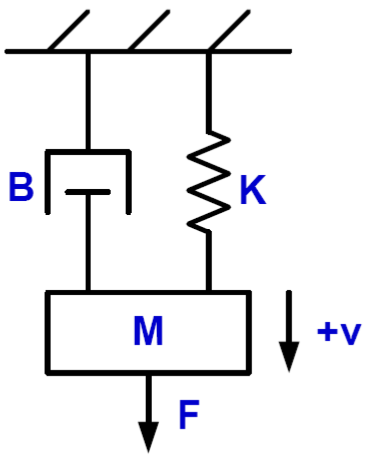
Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 5

- La pulsazione naturale ω_n influenza la velocità di risposta:



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 6

- Un **sistema fisico** del secondo ordine: gruppo massa-molla-smorzatore:



$$M\ddot{z} + B\dot{z} + Kz = F$$

$$z = y;\; F = u$$

$$(Ms^2 + Bs + K)Y(s) = U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 7

- Massa-molla-smorzatore: pulsazione naturale e coefficiente di smorzamento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/M}{s^2 + B/Ms + K/M}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

➔ Se B = 0 corrisponde alla cosiddetta **pulsazione di risonanza**

$$\delta = \frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

$$B_c = 2\sqrt{KM}$$

➔ **smorzamento critico**

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 8

- **N.B.:** il coefficiente di smorzamento dipende dal (ma NON è uguale al) coefficiente di attrito dello smorzatore

- Più precisamente, il coefficiente di smorzamento è il **rapporto** tra il coefficiente dello smorzatore ed il valore di smorzamento critico ($\delta = B/B_c$)

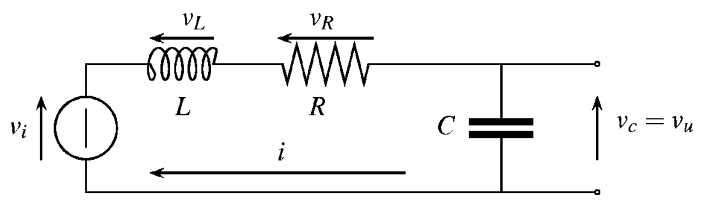
- Quando tale rapporto è > o < di 1 si determina un sistema sovra- o sotto-smorzato

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine - 9

- **Considerazioni energetiche**:
  - Come visto nelle slide 62-69 e 93-101 – FdA-1.2-Sistemi, sono gli effetti dissipativi (attrito degli smorzatori, resistenze elettriche) ad influenzare la stabilità dei sistemi fisici
  - L'assenza di tali effetti corrisponde ad un coefficiente di smorzamento $\delta = 0$ nel sistema del secondo ordine analizzato
  - In tale situazione, il sistema è **semplicemente stabile**: le oscillazioni innescate dalla risposta al gradino persistono inalterate per t → ∞

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine-10

- Circuito elettrico analogo al gruppo massa-molla-smorzatore:



$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\delta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

La **resistenza** svolge ovviamente il ruolo dello **smorzatore**, dissipando l'energia scambiata tra L e C

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine-11

- Si consideri il sistema del secondo ordine con **uno zero al numeratore**:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(1+Ts)}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$$

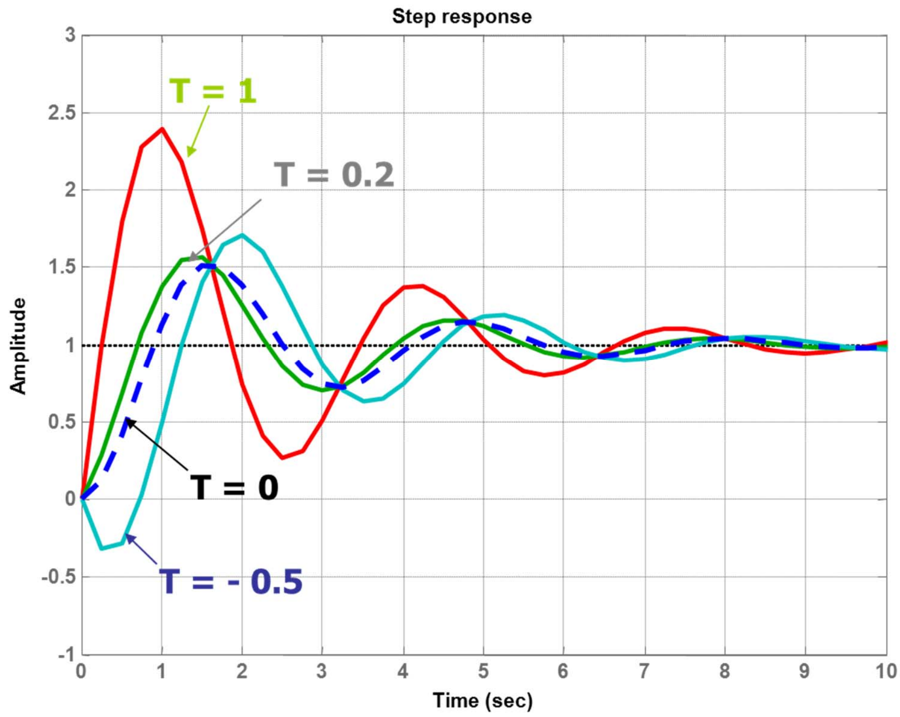
- Si può scrivere:

$$G(s) = G_0 + T\,s\,G_0, \qquad G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G_0(s)}{s}\right] + T\mathcal{L}^{-1}\left[s\frac{G_0(s)}{s}\right] = y_0(t) + T\frac{d\,y_0(t)}{d\,t}$$

Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine-12

- La risposta è del tipo:



Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine-13

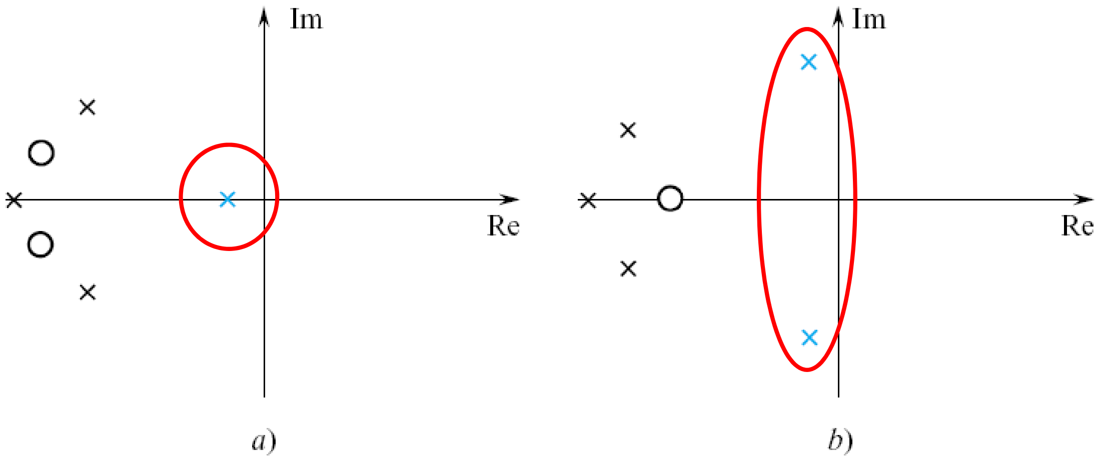
- **N.B.:** la risposta mostrata in precedenza, nel caso di **zero a parte reale positiva** (T < 0), è caratterizzato da una **sottoelongazione** iniziale (o *undershoot*)
- La sottoelongazione è tanto più ampia quanto più è negativa T
- Tale comportamento è tipico dei **sistemi** detti a **fase non minima**, secondo una definizione che verrà formalizzata più avanti in riferimento alla costruzione dei diagrammi di Bode

Sistemi di ordine superiore

- Solitamente sistemi più complessi rispetto a quelli del primo o secondo ordine vengono ricondotti a questi ultimi, trascurando i contributi di poli e zeri maggiormente distanti dall'asse immaginario
- Poli e zeri più vicini all'asse immaginario determinano infatti contributi dominanti nella risposta
- Nell'approssimazione basata sui **poli dominanti** è però necessario conservare il guadagno della funzione di trasferimento (il valore della FdT per s=0)

Sistemi di ordine superiore - 1

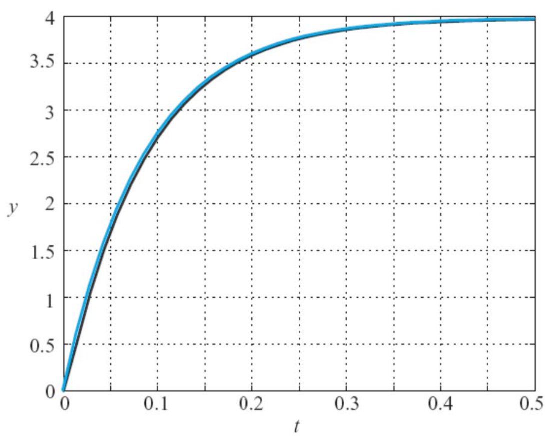
- Esempi di sistemi con un polo reale e due poli complessi dominanti (mappa poli = **X** e zeri = **O**):



Sistemi di ordine superiore - 2

- Esempio: motore DC con R=0.46, L=1, J=0.012, B=0.0008, k_m=0.25, funzione di trasferimento tra tensione v e velocità ω

$$G(s) = \frac{3.98}{(1+0.0856\,s)(1+0.0022\,s)} \Rightarrow G(s) = \frac{3.98}{1+0.0856\,s}$$

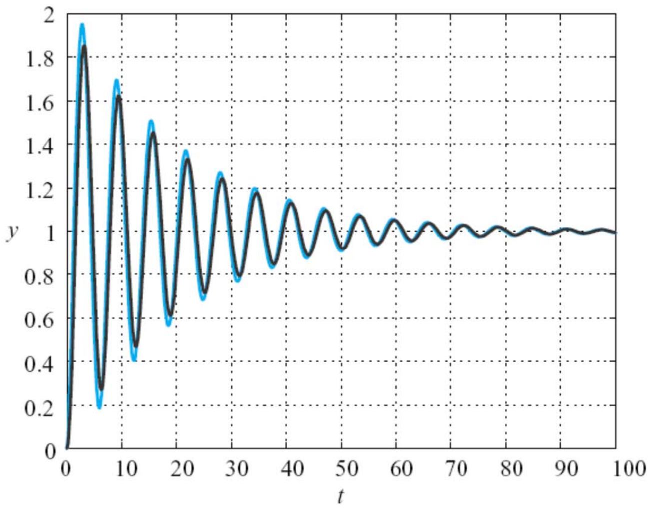


Si è trascurato il polo legato alla parte elettrica (R-L), la cui dinamica è molto più rapida solitamente di quella della parte meccanica (inerzia-attrito)

Sistemi di ordine superiore - 3

- Esempio: $G(s) = \dfrac{1}{(1+0.1\,s)(1+0.02\,s+0.002\,s^2)(1+0.1\,s+s^2)}$

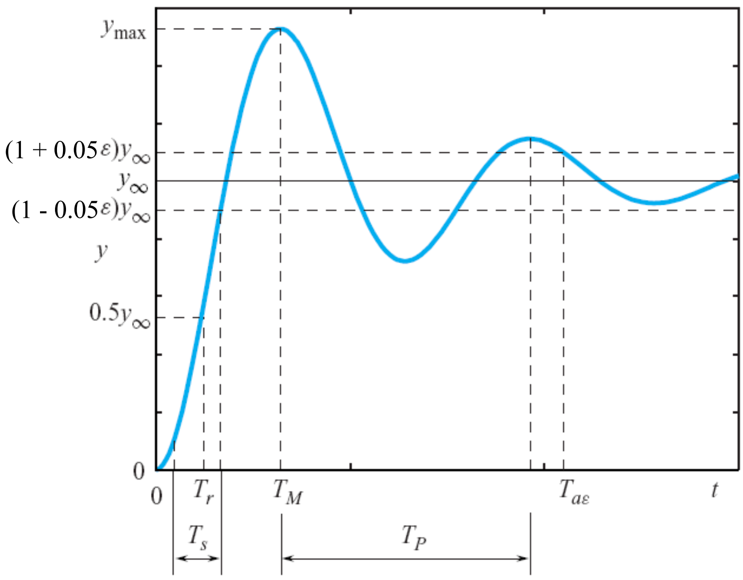
$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{1+0.1\,s+s^2}$$



Si sono trascurati i poli con parte reale -5 e il polo reale in -10, conservando solo i poli con parte reale -0.05

Analisi delle caratteristiche della risposta

- Con l'approccio dei poli dominanti la tipologia di risposta più comunemente ipotizzata nel progetto del controllo è quella del secondo ordine:



Analisi delle caratteristiche della risposta - 1

- In tale tipo di risposta si considerano di interesse le seguenti caratteristiche:
  - Massima sovraelongazione o *overshoot* (percentuale):

$$S\% = 100\frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$$

  - Istante di massima sovraelongazione T_M
  - Tempo di ritardo T_r: tempo necessario per raggiungere il 50% del valore finale
  - Tempo di salita T_s: tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale
  - Tempo di assestamento T_a (al 5%): tempo necessario perché l'uscita rimanga entro il +/- 5% del valore finale

Analisi delle caratteristiche della risposta - 2

- E' possibile stabilire una relazione tra la massima sovraelongazione S% e il coefficiente di smorzamento, ricordando che la risposta è:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\,(s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2)}\right] = 1 - A\,e^{-\delta\omega_n t}\,\sin(\omega t + \varphi)$$

- La sovraelongazione corrisponde ad un punto di massimo, nel quale la derivata di y(t) si annulla:

$$\dot{y}(t) = -A\,e^{-\delta\omega_n t}\,\omega\cos(\omega t + \varphi) + A\,\delta\,\omega_n\,e^{-\delta\omega_n t}\sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$-\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\cos(\omega t + \varphi) + \delta\,\omega_n\sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

Analisi delle caratteristiche della risposta - 3

- Dato il valore definito per $\varphi \quad \Rightarrow \tan(\omega t + \varphi) = \tan\varphi$
- Pertanto le soluzioni sono tutte quelle per cui $\omega t = n\pi$ con n = 0,1,…
- Per n=0 → t=0: all'istante iniziale la pendenza è nulla!
- L'istante di massima sovraelongazione corrisponde alla soluzione per n = 1:

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

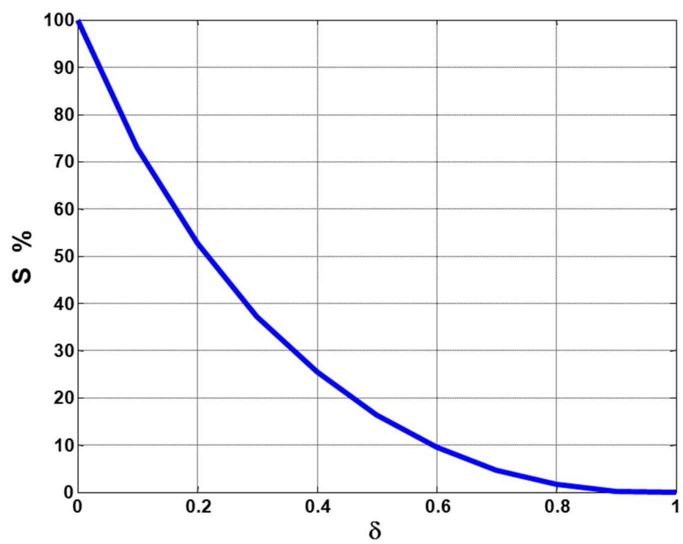
- Il valore di y(t) in tale istante è:

$$y_{max} = 1 + e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

- Quindi: $S\% = 100(y_{max} - 1) = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$

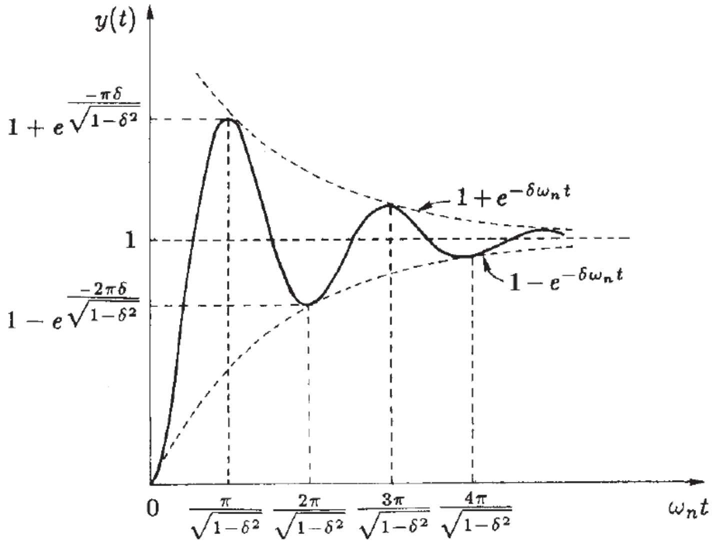
Analisi delle caratteristiche della risposta - 4

- Normalmente si considera accettabile un S% tra il 5 e il 40%, che corrisponde ad un coefficiente di smorzamento tra 0.7 e 0.28:



Analisi delle caratteristiche della risposta - 5

- Risulta più complicato fornire una espressione esatta per il calcolo del **tempo di assestamento** T_a
- E' però semplice determinarne un limite superiore, approssimando la risposta all'inviluppo esponenziale:



Analisi delle caratteristiche della risposta - 6

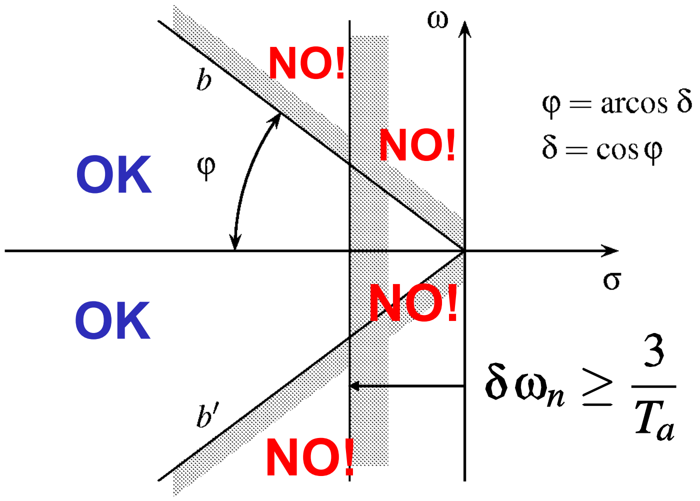
- Si considera pertanto: $y(T_a) = 1 \pm e^{-\delta\omega_n T_a} = 1 \pm 0.05$

  $\Rightarrow e^{-\delta\omega_n T_a} = 0.05$
- Da cui si deduce: $\delta\omega_n T_a = 3$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}}$$

Analisi delle caratteristiche della risposta - 7

- **N.B.:** le specifiche su S% e su T_a impongono dei vincoli sulle regioni del piano complesso dove è ammissibile piazzare i poli complessi coniugati della FdT:



RISPOSTE CANONICHE e SISTEMI ELEMENTARI
- Antitrasformazione di funzioni razionali
- Sistemi del primo e secondo ordine

FINE