Alcuni esercizi

Stefania Ragni

Dipartimento di Economia & Management - Università di Ferrara

Capitalizzazione semplice e composta

Capitalizzazione mista

Capitalizzazione frazionata e tassi equivalenti

3. Parte III: Capitalizzazione frazionata e tassi equivalenti
   - Capitalizzazione frazionata e tassi equivalenti

Attualizzazione

4. Parte IV: Attualizzazione
   - Attualizzazione

Parte I

Capitalizzazione semplice e composta

Capitalizzazione semplice

Si ricordi che $m_L(t, C) = C\, f_L(t) = C(1 + it)$ rappresenta la legge di capitalizzazione semplice con tui i.

Esercizio 1: Il capitale di 150 Euro, impiegato in regime semplice al tui $i = 0.05$, ha dato il montante di 400 Euro. Quale è il tempo di impiego?
Svolgimento: Bisogna determinare t, sapendo che
$C = 150$ Euro, $i = 0.05$ **annuo**, $m_L(t, C) = 400$ Euro
sono noti.
Osservando che

$$t = \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{m_L(t, C)}{C} - 1 \right),$$

si ottiene

$$t = \frac{1}{0.05} \cdot \left(\frac{400}{150} - 1 \right) = 20 \cdot \left(\frac{8}{3} - 1 \right) = 20 \cdot \frac{5}{3} = 33.\bar{3} \text{ anni}$$

Visto che $0.\bar{3} \cdot 12 = 4$, $0.\bar{3}$ anni rappresentano 4 mesi; perciò il tempo richiesto è 33 anni e 4 mesi.

Esercizio 2: Al tasso annuo unitario di interesse del 5%, quanto tempo è necessario per triplicare il capitale investito in regime semplice?
Svolgimento: Osservando che il tasso $i = 5\%$ **annuo** è noto, a partire dal capitale iniziale C, basta richiedere che

$$t = \frac{1}{i}\left(\frac{3C}{C} - 1\right) = \frac{2 \cdot 100}{5} = 40 \text{ anni}$$

Esercizio 3: Il capitale di 5000 Euro ha dato, al tasso annuo $i = 0.025$, il montante di 8500 Euro. Determinare il tempo di capitalizzazione in regime semplice.
Soluzione: 28 anni.

Capitalizzazione composta

Si ricordi che $m_E(t, C) = C\, f_E(t) = C(1+i)^t$ rappresenta la legge di capitalizzazione composta con tui i.

Esercizio 1: Il capitale di 5000 Euro ha dato, al tasso annuo $i = 0.025$, il montante di 8500 Euro. Determinare il tempo di capitalizzazione in regime composto.
Svolgimento: Bisogna determinare t, sapendo che
$C = 5000$ Euro, $i = 0.025$ **annuo**, $m_E(t, C) = 8500$ Euro
sono noti.
Osservando che

$$(1+i)^t = \frac{m_E(t, C)}{C},$$

si ottiene

$$t\, \log(1+i) = \log\left(\frac{m_E(t, C)}{C}\right).$$

Allora si ha

$$t = \frac{\log\left(\frac{m_E(t,C)}{C}\right)}{\log(1+i)} = \frac{\log\left(\frac{85}{50}\right)}{\log(1.025)} = \frac{\log(85)-\log(50)}{\log(1.025)} \approx 21.4894$$

che equivale a 21 anni, 5 mesi e 26 giorni circa.

NB: si noti che $0.4894 \cdot 12 = 5.8728$ e $0.8728 \cdot 30 = 26.184$.

Esercizio 2: A tasso annuo di interesse del 6%, quanto tempo è necessario per duplicare il capitale investito in regime composto?
Svolgimento: Osservando che il tasso $i = 6\%$ **annuo** è noto, a partire dal capitale iniziale C, bisogna determinare t in modo tale che

$$2C = C(1+i)^t,$$

ovvero

$$2 = (1+i)^t.$$

Perciò

$$\log(2) = t \log(1+i)$$

da cui si ottiene

$$t = \frac{\log(2)}{\log(1.06)} \approx 11.8957$$

che corrisponde a 11 anni, 10 mesi e 23 giorni circa.

NB: si noti che $0.8957 \cdot 12 = 10.7484$ e $0.7484 \cdot 30 \approx 22.452$.

Esercizio 3: Il capitale di 156 Euro, impiegato per 20 periodi di capitalizzazione composta, ha dato il montante di 390 Euro. Determinare il tui.

Svolgimento: Si vuole determinare i, sapendo che:
$C = 156$ Euro, $t = 20$ periodi, $m_E(t, C) = 390$ Euro
sono noti.
Visto che

$$1 + i = \left(\frac{m_E(t, C)}{C}\right)^{1/t},$$

si ha

$$i = \left(\frac{390}{156}\right)^{1/20} - 1 \approx 0.0468802$$

Forza istantanea di interesse

Si ricordi che un fattore di capitalizzazione $f(t)$ soddisfa le proprietà

- $f(0) = 1$
- $f(t)$ è continua e strettamente crescente

Inoltre, $\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ rappresenta la forza istantanea di interesse.

Esercizio: Dopo aver provato che

$$f(t) = t + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2}$$

soddisfa le proprietà di un fattore di capitalizzazione, se ne calcoli la forza istantanea di interesse.

Svolgimento: Dato che $f(t) = t + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2}$, si valuta

$$f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

inoltre, $f(t)$ risulta continua in quanto somma di funzioni continue.
Poichè

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{2(1+t)^2} = \frac{2 + 4t + 2t^2 - 1}{2(1+t)^2} = \frac{2t^2 + 4t + 1}{2(1+t)^2} > 0,$$

il fattore $f(t)$ è strettamente crescente per $t > 0$.
Infine

$$\delta(t) = \frac{\frac{2t^2+4t+1}{2(1+t)^2}}{t + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2t^2+4t+1}{2(1+t)^2}}{\frac{2t^2+3t+2}{2(1+t)}} = \frac{2t^2 + 4t + 1}{2t^3 + 5t^2 + 5t + 2}$$

Parte II

Capitalizzazione mista

Capitalizzazione mista

Nella pratica, i regimi di capitalizzazione semplice e composta sono combinati in modo da ottenere la legge di capitalizzazione mista:

$$m(t, C) = C(1 + i)^n(1 + i\alpha)$$

dove n rappresenta la parte intera della durata t e α è la parte decimale della stessa durata.

In sostanza, si usa:

- il regime composto per il numero **intero** di anni,
- il regime semplice per la parte **rimanente**.

Esercizio 1: Quale montante produce l'investimento di 1 Euro per 2 anni e 5 mesi al tui 10% in regime misto?
Svolgimento: Il capitale investito è $C = 1$ Euro, il tui è $i = 10\%$.
La durata dell'investimento è pari a 2 anni e 5 mesi, ovvero $t = 2 + \frac{5}{12}$.
In tal caso risulta $n = 2$ e $\alpha = \frac{5}{12}$. Allora

$$m\left(2+\frac{5}{12},1\right) = \left(1+\frac{1}{10}\right)^2\left(1+\frac{1}{10}\frac{5}{12}\right) = \frac{121}{100}\frac{25}{24} = \frac{121}{96} = 1.26041\bar{6}$$

Esercizio 2: La somma di 1000 Euro, impiegata per 1 anno e 6 mesi in regime misto, ha fruttato il montante di 1050 Euro. Determinare il tasso annuo di impiego.

Svolgimento: Il capitale investito è $C = 1000$ Euro, la durata dell'investimento è pari a 1 anno e 6 mesi, ovvero $t = 1 + \frac{1}{2}$.
In tal caso risulta $n = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.
Anche il montante $m\left(1 + \frac{1}{2}, 1000\right) = 1050$ è noto.
Allora

$$1050 = 1000(1 + i)\left(1 + i\frac{1}{2}\right).$$

Da qui si ottiene

$$21 = 20(1 + i)\left(1 + \frac{i}{2}\right),$$

ovvero

$$21 = 10(1 + i)(2 + i),$$

e

$$10i^2 + 30i - 1 = 0.$$

L'unica radice positiva di tale equazione risulta $i = 0.033 \approx 3.3\%$.

Esercizio 3: La somma di 100 Euro, impiegata per 2 anni e 6 mesi in regime misto, ha fruttato il montante di 107 Euro. Localizzare il tasso annuo di impiego i (cioè determinare due valori i_1 e i_2, compresi tra 0 e 1, tali che $i_1 \leq i \leq i_2$).

Svolgimento: Il capitale investito è $C = 100$ Euro, la durata dell'investimento è pari a 2 anni e 6 mesi, ovvero $t = 2 + \frac{1}{2}$.

In tal caso risulta $n = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

Anche il montante $m\left(2 + \frac{1}{2}, 100\right) = 107$ è noto.

Allora

$$100(1+i)^2\left(1 + i\frac{1}{2}\right) = 107.$$

Da qui si ottiene

$$100(1+i)^2\frac{2+i}{2} = 107,$$

ovvero

$$50i^3 + 200i^2 + 250i - 7 = 0.$$

Pertanto, posto
$$f(i) = 50i^3 + 200i^2 + 250i - 7,$$
bisognerebbe risolvere l'equazione
$$f(i) = 0$$
nell'intervallo $[0, 1]$.
Si osservi che

- f è continua, in quanto essa è un polinomio;
- $f(0) \cdot f(1) < 0$, visto che $f(0) = -7 < 0$ e $f(1) = 493 > 0$;
- f è strettamente crescente, poichè
$$f'(i) = 150i^2 + 400i + 250 > 0$$
per ogni $i > 0$.

Allora, per il teorema degli zeri, si deduce che l'equazione
$$f(i) = 0$$
ammette un'UNICA soluzione nell'intervallo $[0, 1]$.

Inoltre, essendo

$$f(0.02) = -1.9196 < 0, \qquad f(0.03) = 0.6814 > 0,$$

si può porre $i_1 = 0.02$ e $i_2 = 0.03$ ed affermare che $i_1 \leq i \leq i_2$. Quindi il tasso richiesto è compreso tra il 2% e il 3%.

Liquidazione degli interessi in regime semplice

Quando si applica la capitalizzazione semplice si deve tener conto del fatto che, trascorso un periodo di tempo unitario (di solito 1 anno), si liquidano gli interessi.
Sia i il tui annuo.
Se si investe il capitale C, al termine del primo anno di investimento è disponibile il montante

$$m(1, C) = C(1+i).$$

Se l'agente economico decide di non incassare gli interessi e prolungare l'investimento, al termine del secondo anno il montante è

$$m(1, C(1+i)) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2.$$

Dopo n anni il montante diventa

$$C(1+i)^n.$$

Se si liquidano gli interessi, dopo un numero intero di periodi il montante ottenuto con la legge lineare coincide con il montante ottenuto con la legge composta.
Questo spiega la ragione dell'adozione del regime di capitalizzazione mista!! *Infatti, se $t = n$ è intero, allora*

- *la parte intera di t è n,*
- *la parte decimale di t è $\alpha = 0$.*

In questo caso, la formula mista

$$C(1+i)^n(1+i\alpha)$$

diventa

$$C(1+i)^n,$$

ovvero la legge precedente.

Parte III

Capitalizzazione frazionata e tassi equivalenti

Capitalizzazione frazionata e tassi equivalenti

Per motivi concreti, nella pratica capita di dover confrontare diversi periodi temporali nello stesso regime di capitalizzazione.

Ad esempio, il confronto avviene tra capitalizzazioni **annuali** e capitalizzazioni in **frazioni di anno**, cioè **mensili**, **bimestrali**, **trimestrali**, **quadrimestrali**, **semestrali** e così via.

Presa una frazione di anno, si impone l'uguaglianza tra i montanti alla fine del primo anno.

Esempio (Capitalizzazione composta):
Indicato con i il tui annuale, la legge di capitalizzazione composta è $m(t, C) = C(1 + i)^t$.
Il montante alla fine del primo anno risulta $m(1, C) = C(1 + i)$.

Si consideri la p-esima frazione di anno (i.e. si suddivida l'anno in p parti uguali, $p \in \mathbb{N}$) e si definisca un nuovo sistema di riferimento temporale la cui variabile è t_p.

- $t_p = 1$ rappresenta la frazione $\frac{1}{p}$ dell'anno;
- $t_p = p$ corrisponde a 1 anno.

Indicato con i_p il tui relativo alla p-esima frazione di anno, nel nuovo riferimento temporale la legge di capitalizzazione composta diventa $m_p(t_p, C) = C(1 + i_p)^{t_p}$.
Il montante alla fine del primo anno risulta $m_p(p, C) = C(1 + i_p)^p$.

Imponendo che i due montanti alla fine del primo anno coincidano (i.e. $m(1, C) = m_p(p, C)$), si ottiene

$$1 + i = (1 + i_p)^p.$$

Perciò

$$i = (1 + i_p)^p - 1$$

ovvero

$$i_p = (1 + i)^{1/p} - 1.$$

In tal caso i e i_p si dicono **equivalenti**.

- Se $p = 2$, allora t_2 è misurato in **semestri**. Indicato con i_2 il tui semestrale, si ha

$$1 + i = (1 + i_2)^2.$$

- Se $p = 3$, allora t_3 è misurato in **quadrimestri**. Indicato con i_3 il tui quadrimestrale, si ha

$$1 + i = (1 + i_3)^3.$$

- Se $p = 4$, allora t_4 è misurato in **trimestri**.
  Indicato con i_4 il tui trimestrale, si ha

$$1 + i = (1 + i_4)^4.$$

- Se $p = 6$, allora t_6 è misurato in **bimestri**.
  Indicato con i_6 il tui bimestrale, si ha

$$1 + i = (1 + i_6)^6.$$

- Se $p = 12$, allora t_{12} è misurato in **mesi**.
  Indicato con i_{12} il tui mensile, si ha

$$1 + i = (1 + i_{12})^{12}.$$

Esercizio 1: Determinare il tasso semestrale equivalente al tui annuo del 4% in regime di capitalizzazione composta.
Svolgimento: Dato $i = 4\% = 0.04$, si ottiene $i + 1 = (1 + i_2)^2$. Allora

$$i_2 = \sqrt{1+i} - 1 = \sqrt{1.04} - 1 \approx 0.0198.$$

Il tasso semestrale equivalente è $i_2 = 2\%$.

Esercizio 2: Determinare il tasso annuo equivalente al tui trimestrale del 2% in regime di capitalizzazione composta.
Svolgimento: Dato $i_4 = 2\% = 0.02$, si ha

$$i = (1 + i_4)^4 - 1 = 1.02^4 - 1 \approx 0.0824.$$

Il tasso annuo equivalente è $i = 8\%$.

Esercizio 3: Al tasso mensile di interesse del 3% quanto tempo è necessario per triplicare il capitale investito in regime composto?
Svolgimento: Il capitale C è investito al tasso mensile $i_{12} = 3\% = 0.03$ secondo la legge

$$m_{12}(t_{12}, C) = C(1 + i_{12})^{t_{12}},$$

dove il tempo t_{12} si misura in mesi.
Si vuole determinate t_{12} in modo che

$$3C = C(1 + i_{12})^{t_{12}},$$

allora $\log 3 = t_{12} \log(1 + i_{12})$, ovvero

$$t_{12} \approx 37.1670.$$

Il tempo richiesto è 37 mesi e 5 giorni circa.
NB: Si osservi che $0.1670 \cdot 30 \approx 5.0103$.

Esempio (Capitalizzazione semplice):
Indicato con i il tui annuale, la legge di capitalizzazione lineare è
$m(t, C) = C(1 + it)$.
Il montante alla fine del primo anno risulta $m(1, C) = C(1 + i)$.

Si consideri la p-esima frazione di anno (i.e. si suddivida l'anno in p parti uguali, $p \in \mathbb{N}$) e si definisca un nuovo sistema di riferimento temporale la cui variabile è t_p.

- $t_p = 1$ rappresenta la frazione $\frac{1}{p}$ dell'anno;
- $t_p = p$ corrisponde a 1 anno.

Indicato con j_p il tui relativo alla p-esima frazione di anno, nel nuovo riferimento temporale la legge di capitalizzazione lineare diventa
$m_p(t_p, C) = C(1 + j_p t_p)$.
Il montante alla fine del primo anno risulta $m_p(p, C) = C(1 + j_p p)$.

Imponendo che i due montanti alla fine del primo anno coincidano (i.e. $m(1, C) = m_p(p, C)$), si ottiene

$$1 + i = 1 + j_p p.$$

Perciò

$$i = j_p p$$

ovvero

$$j_p = \frac{i}{p}.$$

In tal caso i e j_p si dicono **equivalenti**.

- Se $p = 2$, allora t_2 è misurato in **semestri**.
  Indicato con j_2 il tui semestrale, si ha
  $$i = 2\,j_2.$$

- Se $p = 3$, allora t_3 è misurato in **quadrimestri**.
  Indicato con j_3 il tui quadrimestrale, si ha
  $$i = 3\,j_3.$$

- Se $p = 4$, allora t_4 è misurato in **trimestri**.
  Indicato con j_4 il tui trimestrale, si ha
  $$i = 4\, j_4.$$

- Se $p = 6$, allora t_6 è misurato in **bimestri**.
  Indicato con j_6 il tui bimestrale, si ha
  $$i = 6\, j_6.$$

- Se $p = 12$, allora t_{12} è misurato in **mesi**.
  Indicato con j_{12} il tui mensile, si ha
  $$i = 12\, j_{12}.$$

Parte IV

Attualizzazione

Attualizzazione

Si ricordi che, dato il tui i, risulta:

- $\varphi_L(t) = \dfrac{1}{1+it}$ è il fattore di attualizzazione semplice;
- $\varphi_E(t) = (1+i)^{-t}$ è il fattore di attualizzazione composto.

Esercizio 1: Calcolare il valore attuale di 100 Euro disponibili fra 7 mesi e 15 giorni al tui annuo del 5% in regime semplice e composto.

Svolgimento: Bisogna osservare che 7 mesi e 15 giorni equivalgono a $t = \frac{7}{12} + \frac{15}{360} = \frac{5}{8}$. Inoltre, sia $C = 100$ Euro.

In regime semplice si ha

$$a_L(t, C) = C\varphi_L(t) = 100\frac{1}{1+\frac{5}{100}\frac{5}{8}} = 100\frac{32}{33} \approx 96.97$$

In regime composto si ha

$$a_E(t, C) = C\varphi_E(t) = 100(1.05)^{-5/8} \approx 97$$

Infine...

Esercizio: Si consideri la funzione

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2, \qquad t \geq 0,$$

come un fattore di capitalizzazione. Si chiede di:

(a) scrivere la legge di capitalizzazione corrispondente

(b) determinare il valore attuale di 3000 Euro disponibili tra 1 anno

(c) valutare il tasso unitario di interesse

Svolgimento: Si ha che:

(a) la legge di capitalizzazione corrispondente è espressa come

$$m(t, C) = C\left(1 + \frac{1}{2}t^2\right);$$

(b) il valore attuale di 3000 Euro disponibili tra 1 anno risulta pari a

$$3000\frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2} = \frac{3000 \cdot 2}{3} = 2000;$$

(c) il tasso unitario di interesse è

$$i = \frac{m(1, C) - C}{C} = f(1) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = 0.5$$

esso risulta pari al 0.5%.