ESERCIZI DI MATEMATICA FINANZIARIA
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT UNIFE
A.A. 2018/2019

Esercizi: lezione 22/11/2018

VALUTAZIONI DI TITOLI OBBLIGAZIONARI

Esercizio 1. Un BTP ha vita residua 9 mesi, paga cedole semestrali ed ha valore nominale pari a 1000€. Se il tasso cedolare è il 20% e il corso *tel quel* (in simboli, C_{tq}) è 1121, 76€, determinare il corso secco (C_s) e il suo rendimento r tra i seguenti tassi:

a) 10% *b*) 12% *c*) 14% *d*) 15%

Soluzione. Poiché la cedola è semestrale, il valore della cedola è

$$c = \frac{N \cdot i}{2} = \frac{1000 \cdot 0,2}{2} = 100€.$$

L'investimento prevede la corresponsione di una cedola pari a 100€ fra 3 mesi e di un'altra cedola sempre pari a 100€ fra 9 mesi, unitamente al rimborso del valore nominale. Siccome il periodo di non godimento della cedola é esattamente pari alla metá dei sei mesi previsti, il rateo é pari alla metá della cedola, ossia 50 euro. Pertanto, il corso secco é dato da $C_s = C_{tq} -$ rateo $= 1121,76 - 50 = 1071,26$ euro. Inoltre, il discounted cash-flow é dato da:

$$G(x) = -C_{tq} + \frac{100}{(1+x)^{\frac{1}{4}}} + \frac{1100}{(1+x)^{\frac{3}{4}}} = -C_{tq} + \frac{100 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} + 1100}{(1+x)^{\frac{3}{4}}}.$$

Allora abbiamo che $G(r) = 0$, ossia

$$-C_{tq} + \frac{100 \cdot (1+r)^{\frac{1}{2}} + 1100}{(1+r)^{\frac{3}{4}}} = 0,$$

e dunque

$$\frac{100 \cdot (1+r)^{\frac{1}{2}} + 1100}{(1+r)^{\frac{3}{4}}} = C_{tq}.$$

Per trovare il rendimento effettivo dobbiamo sostituire ad uno ad uno i valori a), b), c), d) nell'equazione $\mathrm{DCF}(r) = 0$ fino ad ottenere un'identità.

Se $r = 10\%$, allora

$$\frac{100 \cdot (1,1)^{\frac{1}{2}} + 1100}{(1,1)^{\frac{3}{4}}} = 1121,759098 \cong 1121,76.$$

Dunque il rendimento effettivo è pari al 10%.

Esercizio 2. Acquistate a 1000 euro un BTP di nominale pari esattamente a $N = 1000$, con scadenza tra 3 mesi e cedola semestrale. Se il rendimento garantito è del $16,985856\%$, a quanto ammonta il solo corso secco?

Soluzione. In questo caso, il corso tel quel, denominato $C_{tq} > 0$, ossia il valore effettivo pagato per acquistare il titolo, che è sempre dato dalla somma del corso secco e rateo, è pari al valore nominale, denominato N. Poiché dopo tre mesi il titolo scade e restituisce il nominale piú metá cedola annuale (ossia la semestrale), il *cash-flow* è dato da

$$\{(0, -C_{tq}); (1/4, N(1 + i/2))\},$$

ove i denota il tasso cedolare. Pertanto, l'equazione da impostare è

$$C_{tq} = \frac{N(1 + i/2)}{(1 + r)^{1/4}},$$

ove r è il rendimento garantito. Ricordando che, appunto, $C_{tq} = N$, se ricaviamo algebricamente i, si ha che

$$i = 2((1 + r)^{1/4} - 1).$$

Inserendo i dati, si trova che $i = 8\%$, pertanto la cedola semestrale è pari a 40 euro e conseguentemente il rateo è di 20 euro, quindi, in definitiva, il corso secco, come differenza tra il corso tel quel e il rateo, è pari a 980 euro.

Esercizio 3. Un risparmiatore acquista un BTP in scadenza tra un anno esatto, con nominale $N = 100$ euro e cedole semestrali con tasso cedolare $i = 5\%$. Al momento dell'acquisto, il rendimento é $r_0 = 4\%$. Si determini:

(1) il cash -flow dell'intero investimento;
(2) il TIR dell'investimento ;
(3) gli outstanding capitals w_0, w_1 e w_2 non ricorsivi, relativi rispettivamente al momento dell'acquisto, al sesto mese e all'anno, ove w_1 sia il valore di mercato del BTP al sesto mese, tenendo conto che, a quella stessa epoca, il rendimento é $r_1 = 6\%$;
(4) il GVAN dell'investimento, con costi opportunitá $i_1 = 5\%$ e $i_2 = 4\%$ relativi rispettivamente ai primi sei mesi e ai successivi sei mesi;

(5) le quote di periodo $g_1(i_1, i_2)$ e $g_2(i_1, i_2)$ che scompongono il GVAN trovato al punto precedente.

Soluzione.

(1) Il cash -flow é dato da $a_0 = -P(0; r_0)$, ove con $P(0; r_0) > 0$ si intende il prezzo del BTP (al tempo $t = 0$) a tasso di mercato r_0, $a_1 = iN/2$, ossia la prima cedola (si noti che per la semestralitá corrisponde a metá della annuale) e, infine, $a_2 = iN/2 + N$, ossia ultima cedola piú il rimborso. Inserendo i dati, si trova quindi che $a_1 = 2,5$ e $a_2 = 102,5$. Inoltre, il discounted cash-flow é dato da:
$$G(x) = -P(0; r_0) + \frac{2,5}{\sqrt{1+x}} + \frac{102,5}{(1+x)}.$$
Per definizione, il rendimento r_0 é esattamente il TIR dell'investimento al tempo $t = 0$, quindi $G(r_0) = 0$, ossia (con approssimazione, come solito, per arrotondamento alla seconda cifra decimale)
$$P(0; r_0) = \frac{2,5}{\sqrt{1,04}} + \frac{102,5}{(1,04)} \cong 101.$$
Pertanto, il cash-flow é dato da $a_0 = -101$, $a_1 = 2,50$ e $a_2 = 102,50$.

(2) La seconda domanda é in realtá pleonastica: il TIR dell'investimento, per quanto appena detto, coincide con r_0, ossia il 4%.

(3) Gli *outstanding capitals* banali sono $w_0 = |a_0| = 101$ e $w_2 = 0$; per trovare w_1, invece, bisogna calcolare $P(0,5; r_1)$, ossia il prezzo del titolo all'epoca $t_1 = 0,5$, con rendimento dato da $r_1 = 6\%$. Usando lo stesso ragionamento con cui abbiamo determinato $P(0; r_0)$, scriviamo il discounted cash-flow dell'investimento per un investitore che lo acquisti dopo sei mesi e lo tenga fino alla scadenza:
$$G_1(x) = -P(0,5; r_1) + \frac{102,5}{\sqrt{1+x}}.$$
Di nuovo, r_1 é il TIR di $G_1(x)$, ossia $G_1(r_1) = 0$, da cui
$$w_1 = P(0,5; r_1) = \frac{102,5}{\sqrt{1,06}} \cong 99,56.$$

(4) Il GVAN richiesto coincide con $G(i_1, i_2)$, ossia
$$G(i_1, i_2) = -101 + \frac{2,5}{\sqrt{1+i_1}} + \frac{102,5}{\sqrt{1+i_1}\sqrt{1+i_2}},$$
e inserendo i dati si trova che $G(i_1, i_2) \cong -0,47$, dal che se ne deduce che rispetto ai tassi di mercato i_1 e i_2 non converrebbe aderire a tale investimento perché si avrebbe un minusvalore di circa mezzo euro.

(5) Per la scomposizione del GVAN trovato in precedenza nelle due quote $g_1(i_1, i_2)$ e $g_2(i_1, i_2)$ di periodo, ossia per il primo e secondo semestre, si deve sfruttare la formula generale valida per capitali residui non ricorsivi, data da

$$g_k = \frac{w_k + a_k - w_{k-1}(1+i)}{(1+i)^k}, \qquad k = 1, \dots, n,$$

dopo averla adattata opportunamente al nostro contesto, perché, rispetto al modello analizzato che ci ha permesso di ricavare tale formula, ci sono due novitá: intanto, stiamo scomponendo un GVAN e non un VAN, poi le quote di periodo non sono annuali ma semestrali. L'adattamento quindi porta a

$$g_1(i_1, i_2) = \frac{w_1 + a_1 - w_0\sqrt{1+i_1}}{\sqrt{1+i_1}} \cong -1,40$$

e

$$g_2(i_1, i_2) = \frac{w_2 + a_2 - w_1\sqrt{1+i_2}}{\sqrt{1+i_1}\sqrt{1+i_2}} \cong 0,93.$$

Si noti che la prestazione del secondo semestre é positiva, mentre quella del primo semestre é talmente negativa da rendere negativo anche il GVAN totale; infine, come atteso, si trova che $g_1 + g_2 =$GVAN.

Esercizio 4. Un BTP di nominale N, cedola semestrale, tasso cedolare i, in scadenza tra 9 mesi, vi viene offerto con la assoluta garanzia che il rendimento effettivo sia $r > 0$.

a) A quanto ammonta il prezzo P del BTP?
b) Un altro gestore vi propone alternativamente di investire il vostro gruzzolo P in un titolo a zero coupon di 9 mesi. Quanto deve essere il suo nominale N^* perché abbia un rendimento pari a r?
c) In caso di accettazione del titolo a zero coupon, supponendo che dopo 3 mesi vogliate venderlo, quale dovrebbe essere il minimo prezzo di vendita P_V per non andare sotto il rendimento r?
Nota Bene: si precisa che le soluzioni richieste sono di tipo letterale e non numerico e dipendono, nella loro versione finale, esclusivamente dai dati N, r ed i.

Soluzione.

a) Poiché la cedola è semestrale, il valore della cedola è

$$c = \frac{N \cdot i}{2}.$$

L'investimento prevede la corresponsione di una cedola pari a c fra 3 mesi e di un'altra cedola pari a c fra 9 mesi, unitamente al rimborso del valore nominale. Quindi, detto G il discounted cash-flow del titolo, si ha che

$$G(x) = -P + \frac{c}{(1+x)^{\frac{1}{4}}} + \frac{c+N}{(1+x)^{\frac{3}{4}}} =$$

$$= -P + \frac{\frac{N \cdot i}{2}}{(1+x)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{N \cdot i}{2} + N}{(1+x)^{\frac{3}{4}}}.$$

Poiché il rendimento effettivo r è il TIR dell'investimento, abbiamo che $G(r) = 0$, ossia

$$-P + \frac{\frac{N \cdot i}{2}}{(1+r)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{N \cdot i}{2} + N}{(1+r)^{\frac{3}{4}}} = 0.$$

Dobbiamo ora ricavare P e non é difficile vedere che:

$$P = N \cdot \left(\frac{i/2}{(1+r)^{\frac{1}{4}}} + \frac{i/2+1}{(1+r)^{\frac{3}{4}}} \right). \tag{1}$$

b) Siccome in un titolo a zero coupon il montante finale coincide con il nominale, volendo mantenere lo stesso rendimento r del BTP, il valore N^* cercato soddisfa la seguente equazione:

$$N^* = P\Big(1 + \frac{3}{4}r\Big).$$

Sostituendo P con il valore trovato nella Eq. (1), si arriva alla seguente soluzione finale, in dipendenza dei soli dati:

$$N^* = N \cdot \left(\frac{i/2}{(1+r)^{\frac{1}{4}}} + \frac{i/2+1}{(1+r)^{\frac{3}{4}}} \right)\Big(1 + \frac{3}{4}r\Big).$$

c) Se supponiamo di vendere il titolo a zero coupon dopo 3 mesi dall'acquisto, abbiamo che

$$P_V = P \cdot \Big(1 + \frac{1}{4}r^*\Big),$$

ove r^* è il rendimento. Dobbiamo trovare P_V in modo tale che $r^* \geq r$. Abbiamo che:

$$P_V = P \cdot \Big(1 + \frac{1}{4}r^*\Big) \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{4}r^* = \frac{P_V}{P} \quad \Rightarrow \quad r^* = 4 \cdot \Big(\frac{P_V}{P} - 1\Big).$$

Poiché deve essere $r^* \geq r$, allora otteniamo

$$4 \cdot \Big(\frac{P_V}{P} - 1\Big) \geq r \quad \Rightarrow \quad \frac{P_V}{P} - 1 \geq \frac{r}{4} \quad \Rightarrow \quad P_V \geq P\Big(1 + \frac{r}{4}\Big),$$

ossia, ricorrendo nuovamente alla Eq. (1), si arriva alla seguente soluzione finale, in dipendenza dei soli dati:

$$P_V \geq N \cdot \left(\frac{i/2}{(1+r)^{\frac{1}{4}}} + \frac{i/2+1}{(1+r)^{\frac{3}{4}}} \right) \Big(1 + \frac{r}{4} \Big).$$

Esercizio 5. Il titolo A, acquistato oggi per un nominale di 100€, scade tra 2 anni esatti e paga cedole annue con tasso cedolare pari al 2%. Il titolo B, di vita residua pari a 6 mesi, acquistato per un nominale di 100€, paga cedole annue con tasso cedolare pari al 3%. Per entrambi i titoli è assicurato, al momento attuale, un rendimento pari al 4%.

a) Calcolare il *corso tel quel* del titolo A.
b) Calcolare il *corso secco* del titolo B.

Soluzione.

a) Il valore della cedola del titolo A è pari a $c = N \cdot i$, dove N è il valore nominale del titolo e $i = 0,02$ il tasso cedolare, allora $c = 100 \cdot 0,02 = 2$. Dunque il titolo A prevede la corresponsione di una cedola pari a 2€ fra un anno e di un'altra cedola pari a 2€ fra due anni, unitamente al rimborso del valore nominale. Quindi

$$G(x) = -C_{tq} + \frac{2}{1+x} + \frac{102}{(1+x)^2}.$$

Poiché il rendimento del 4% è il TIR dell'investimento, abbiamo che

$$-C_{tq} + \frac{2}{1,04} + \frac{102}{(1,04)^2} = 0$$

da cui otteniamo che il *corso tel quel* del titolo A è

$$C_{tq} = \frac{2}{1,04} + \frac{102}{(1,04)^2} \cong 96,23€$$

b) Il valore della cedola del titolo B è pari a $c = N \cdot i_1$, dove N è il valore nominale del titolo e $i_1 = 0,03$ il tasso cedolare, allora $c = 100 \cdot 0,03 = 3$. Dunque il titolo B prevede la corresponsione di una cedola pari a 3€ fra 6 mesi, unitamente al rimborso del valore nominale. Quindi

$$G(x) = -C_{tq} + \frac{103}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Poiché il rendimento del 4% è il TIR dell'investimento, abbiamo che

$$-C_{tq} + \frac{103}{(1,04)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

da cui otteniamo che il *corso tel quel* del titolo B è

$$C_{tq} = \frac{103}{(1,04)^{\frac{1}{2}}} \cong 101€$$

Il *corso secco* del titolo B si ottiene scorporando dal *corso tel quel* il rateo. Poiché il titolo è stato emesso un anno e mezzo fa con cedola annuale, è stata riconosciuta al venditore del titolo la parte di cedola di sua competenza (esattamente per la metà), quindi il rateo è pari a $1,5$€. Conseguentemente, il *corso secco* del titolo B è pari a $101 - 1,5 \cong 99,50$€.